

# 电子科大 2016 年数学建模竞赛指南

## 目 录

数学建模—数学魅力的体现 .....	1
数学建模校内赛竞赛规则 .....	2
2016 年电子科大第十六届数学建模竞赛时间的规定 .....	2
2016 年电子科大校内赛竞赛报名 .....	3
2016 年校内数学建模竞赛发题安排 .....	4
2016 年校内赛收卷安排 .....	4
数学建模校内赛的答卷要求 .....	5
论文范例 1：全国赛优秀论文 .....	7
论文范例 2：2014 年校内赛优秀论文 .....	33
论文范例 3：2015 年校内赛优秀论文 .....	51

注：本文档可在如下网页处下载：

数学科学学院数学建模网：  
<http://www.math.uestc.edu.cn/mathmodeling/index.php>



## 数学建模—数学魅力的体现

### 电子科技大学第十六届数学建模竞赛通知

科技的发展依赖数学，数学已经深入到我们生活的每一个方面。特别是我校以电子类工科见长的特点，使数学显得更加重要。也许你还疑惑“学数学有什么用？”

你是否思考过这样一些问题：

“现在大学生就业难，你能用数学方法分析它的原因和影响因素吗？”

“能否用已得到的数据去预测罪犯的下一次犯罪的时间和地点？”

“中国股市的新一轮牛市已结束，你能知道股市会怎么走？”

“我们能否复原已经破碎的东西？(哈哈,不知道是否包含破碎的心哈!!!)”

“我们能否从图片或视频中找到某些敏感或秘密的内容（比如词语或人），让我们象对待文本一样实现快速检索？”

数学建模为你打开了一扇窗户，把目光从书本引向充满新奇和奥秘的世界，原来在我们的世界数学无处不在。成功应用数学是事业成功的起点，数学建模活动是通向成功应用数学的桥梁。

关于数学、关于数学建模你想了解更多吗？你想体会三天里的日夜鏖战，三人合作完成一篇科技论文的兴奋与成功的喜悦吗？你想参加全国大学生数学建模竞赛和美国大学生数学建模竞赛吗？

电子科大数学建模活动为你提供平台展示自己。我校第十六届大学生数学建模竞赛即将举办，这是一个身临其境的机会，一个可望选拔进入培训与参赛的机会，千万不要错失良机。

竞赛时间：5月20日（星期五）上午8:00发题，

5月23日（星期一）上午8:00收题。

报名方式：访问网站 <http://www.math.uestc.edu.cn/mathmodeling/index.php>

赛前讲座：清水河校区

覃思义副教授主讲：《数学建模概论》。

时间：5月8日(星期日)晚7:00;

地点：清水河校区立人楼B318。

张勇副教授主讲：《如何参加数学建模竞赛》。

时间：5月15日(星期日)晚7:00;

地点：清水河校区立人楼B318。

教务处 学生工作部 数学科学学院

电子科大数学建模中心

2016年5月3日

## 电子科技大学第十六届大学生数学建模竞赛

### 数学建模校内赛竞赛规则

我校举办的数学建模竞赛是面向全校大学生的群众性科技活动，目的在于激励学生学习数学的积极性，提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题的综合能力。鼓励我校学生踊跃参加课外科技活动，培养创新精神，从而全面提高综合素质。为使竞赛健康进行，保证竞赛公平、公正性，制定竞赛规则如下：

- 一、凡我校在校学生均可报名参赛。
- 二、以队为单位参赛，每队3人，专业不限，每人限参加一个队。
- 三、竞赛期间参赛队员除不得与队外任何人（包括在网上）讨论外，可以使用各种图书资料、计算机软件或在国际互联网上浏览。
- 四、参赛队员应在规定时间内完成答卷并准时交卷，过期以自动弃权处理。
- 五、答题地点与计算机均由各参赛队自行解决或相关学院协助解决，竞赛前应向竞赛组委会提交答题地点，以备组委会巡视。
- 六、参赛论文正文应严格按照要求的纸型（A4纸型）、字体打印（小四宋体）等规定，答卷内不得出现与答卷无关的文字、符号或记号、参赛队信息等。
- 七、参赛队必须自己完成竞赛，不得向队外人员寻求帮助。
- 八、本次竞赛采取全国赛的评价机制：数学建模中心请专家评阅试卷，以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰程度为评奖指标；对部分优秀结果要进行答辩。
- 九、对违反本竞赛规则的参赛队，经学校数学建模中心认定，取消其参赛资格，情节严重的将上报学校，按学校规定处理并通报全校。

### 2016年电子科大第十六届数学建模竞赛时间的规定

- 一、竞赛时间：5月20日（星期五）上午8:00发题，  
5月23日（星期一）上午8:00收题。

- 二、竞赛收发题  
发题：5月20日（星期五）上午8:00发题。  
参见《2016校内赛发题安排》。

- 交卷：5月23日（星期一）上午8:00前收答卷。  
参见《2016校内赛交卷安排》。

教务处 学生工作部 应用数学学院  
电子科大数学建模中心  
2016年5月3日

## 2016 年电子科大校内赛竞赛报名

报名时间：2016 年 5 月 4 日至 5 月 19 日

报名方式：访问网站

<http://www.math.uestc.edu.cn/mathmodeling/index.php>

先在网站注册，然后在自己的页面中加入相应的竞赛即可。



1 扫一扫直接进入

### 说明：

1、评奖分大一组和大二以上组。

队中三个人都是大一的，归为大一组；如果队中有一个以上是大二以上年级的同学，则归为大二以上组。

2、报名时，先行注册。组队时，由队长在报名中，给已注册的队员发出邀请，同意加入后即组成一个队。

3、如果该队在学习训练过程中没有指导教师，则可以不填指导老师这一栏。

## 2016 年校内数学建模竞赛发题安排

### 赛题发布方式：

1、题目将在 2016 年 5 月 20 日早上 8: 00 发布在数学科学学院数学建模网站上：<http://www.math.uestc.edu.cn/mathmodeling/index.php> 的数模新闻的公告栏中。

2、同时题目将发到教师主页：<http://staff.uestc.edu.cn/qinsiyi>



2 扫一扫直接进入

### 没有计算机的同学请注意：

可以和自己学院联系协助，也可以到数学学院机房(清水河校区)科 A227，科 A229 上机。

机房开放时间：

周六和周日早上 8:30~12:00，下午 14: 00~18:00，晚上是 7: 00~9: 00。  
沙河校区无公共机房上机安排，参赛队自行解决。

## 2016 年校内赛收卷安排

### 收卷方式：

一、请将完成试卷，在 5 月 23 日上午 8: 00 前，发到下面邮箱：

[uestcmcm@qq.com](mailto:uestcmcm@qq.com)

逾期未提交者视为违规，试卷作废。

注 1：邮件的主题为：2016 校内赛+年级+队号+参赛队员姓名；

邮件附件为压缩后的论文，文件名取法和邮件主题名称一致。

注 2：论文必须是 WORD (或 PDF) 的格式。

注 3：队号可在正式竞赛发题时，从数学建模网站下载参赛队的队号表查找。

二、同时将论文打印一份纸质文档，必须和所提交的相关电子文档一致，在 5 月 23 日中午 12 点前交到指定地点：

**清水河校区：**基础实验楼科 A225；

**沙河校区：**通信楼三楼 319(会议室)。

逾期未交者视为违规，提交的电子论文作废。

# 数学建模校内赛的答卷要求

(可以参考本指南中的论文范文)

## 一. 答卷内容要求

答卷应包含以下内容:

- 1、承诺书。
- 2、编号专用页。
- 3、摘要页 (内容不能超过一页): 本文解决什么问题, 解决问题的方法, 得到什么结论。
- 4、正文
  - 1) 问题的提出: 叙述问题的内容及意义。
  - 2) 基本假设: 写出问题的合理假设。
  - 3) 建立模型: 详细叙述模型、变量、参数代表的意义和满足的条件, 建模思想。
  - 4) 计算模型: 求解及算法的主要步骤。
  - 5) 结果分析与检验 (含误差分析)。
  - 6) 模型评价: 模型的优缺点及改进意见。
  - 7) 参考文献: 限公开发表的文献, 指明出处。
- 5、附件: 计算框图, 源程序、运算打印结果。

## 二. 答卷卷面要求

1. 论文用白色 A4 纸打印; 上下左右各留出至少 2.5 厘米的页边距; 从左侧装订。
2. 论文第一页为承诺书, 包含答卷题目、参赛学院、参赛队员姓名、学号、指导教师信息 (若没有, 可不填)、是否愿意参加 2016 年的国内赛等内容。
3. 论文第二页为编号专用页, 此页不用填写。
4. 论文题目和摘要写在论文第三页上, 从第四页开始是论文正文。
5. 论文从第三页开始编写页码, 页码必须位于每页页脚中部, 用阿拉伯数字从“1”开始连续编号。
6. 论文的页眉只能含队的编号, 论文中不能有任何可能显示答题人身份的标志。
7. 论文题目用三号黑体字、一级标题用四号黑体字, 并居中; 二级、三级标题用小四号黑体字, 左端对齐 (不居中)。论文中正文汉字一律采用小四号宋体字, 行距用单倍行距, 打印时应尽量避免彩色打印。
8. 请大家注意: 摘要应该是一份简明扼要的详细摘要 (包括关键词), 在整篇论文评阅中占有重要权重, 请认真书写 (注意篇幅不能超过一页, 且无需译成英文)。评阅时将首先根据摘要和论文整体结构及概貌对论文优劣进行初步筛选。

9. 论文应该思路清晰, 表达简洁 (正文尽量控制在 20 页以内, 附录页数不限)

10. 引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料) 必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中均明确列出。正文引用处用方括号标示参考文献的编号, 如[1][3]等; 引用书籍还必须指出页码。参考文献按正文中的引用次序列出, 其中书籍的表述方式为:

[编号] 作者, 书名, 出版地: 出版社, 出版年。

参考文献中期刊杂志论文的表述方式为:

[编号] 作者, 论文名, 杂志名, 卷期号: 起止页码, 出版年。

参考文献中网上资源的表述方式为:

[编号] 作者, 资源标题, 网址, 访问时间 (年月日)。

11. 本规范的解释权属于电子科技大学大学生数学建模中心。

## 论文范例 1：全国赛优秀论文

### 承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们的题目是： 基于延迟矩阵和优先级矩阵的病床分配模型

我们参赛年级是（一年级，二年级以上）： 二年级以上

所属学院（请填写完整的全名，可填多个）： 数学科学学院

参赛队员（打印并签名）： 1. 唐万荣

2. 胡辟砾

3. 杨红升

指导教师或指导教师组负责人（有的话打印）： 杜鸿飞

是否愿意参加国内赛（是，否）： 是

日期： 2016 年 5 月 23 日

---

报名队号（请查阅《2016 校内赛报名队信息-0520》后填写）：

# 2016 电子科技大学大学生数学建模竞赛

## 编 号 专 用 页

报名队号 (请查阅《2016 校内赛报名队信息-0520》后填写):

评阅记录:

评阅人				
评分				
备注				

## 基于延迟矩阵和优先级矩阵的病床分配模型

### 摘要

本文针对某眼科医院病床分配存在的问题，建立了基于延迟矩阵和优先级矩阵的病床分配模型，提出了按照优先级矩阵分配病床的方案。

通过对医院运行机理的分析，选取了平均等待入院时间、平均等待手术时间、平均逗留时间、周均手术数量、系统稳定性为评价指标。用这些指标对实际运行数据进行分析，发现原病床分配方案的不足主要在于：平均等待手术时间过长，等待入院的病人数量不断增加。

为刻画手术时间安排对系统运行的影响，本文引入延迟矩阵，建立了多目标优化模型一，得到最优指标对应的优先级矩阵。多次模拟系统一年的运行，改进后的方案与原方案（FCFS）相比，平均等待入院时间由 12.9 天降至 3.3 天，平均逗留时间由 22.0 天降至 12.3 天。

针对病人对入住时间的查询需求，模型二的程序从系统当前状态（住院病人情况，等待病人情况）出发，利用模型一解得的分配策略进行模拟调度，直至该病人入住为止。在病人们诊时，医院可根据查询程序告知病人可能入住的时间区间及最有可能的入住时间。

对模型一中的延迟矩阵做出调整，得到在双休日不安排手术条件下的模型三，求解得到最优指标对应的优先级矩阵。该方案下，模拟系统一年的运行，平均等待入院时间为 14.2 天，平均逗留时间为 23.2 天。通过对各类病术前准备时间的分析，认为将白内障手术时间安排在周三和周五，能够改善各项指标；故再次更改延迟矩阵，模拟得，平均等待入院时间降为 5.5 天，平均逗留时间降为 14.5 天，因此，该医院应该对手术安排时间进行调整。

出于便于管理的目的，本文给出了病床比例分配模型。该模型对各类病划分固定的床位，同类病使用 FCFS 规则。以平均逗留时间最小为目标，在各类病日均比例附近搜索，得到的最优的病床数为：外伤 10 床，单眼白内障 15 床，双眼白内障 20 床，青光眼 11 床，视网膜疾病 23 床。该方案相比普通 FCFS，平均逗留时间由 20.5 天降至 18.4 天。

**关键字** 病床分配 延迟矩阵 优先级矩阵 系统模拟

## 一、问题重述

患者去医院就医往往需要排队，例如排队等待住院。现要求考虑某医院眼科病床的合理安排问题，以提高对该医院资源的有效利用。

已知该医院眼科门诊每天开放，住院部的病床数为 79。该医院眼科手术主要分四大类：白内障、视网膜疾病、青光眼和外伤。其中，白内障无急诊，目前是周一、周三做手术，术前准备时间为 1、2 天，做双眼的病人占 60%，且周一、周三各做一只；外伤疾病通常属于急症，病床有空时立即安排住院，住院后第二天便会安排手术；视网膜疾病和青光眼急症数量较少，建模时可不考虑急症，这两类患者大致住院以后 2-3 天内接受手术，其术后的观察时间较长。附录中给出了 2008 年 7 月 13 日至 2008 年 9 月 11 日这段时间里各类病人的情况。

该医院眼科手术条件比较充分，可不考虑手术条件的限制。但考虑到手术医生的安排问题，白内障手术与视网膜疾病、青光眼不安排在同一天做。当前该住院部对全体非急症病人是按照 FCFS (First come, First serve) 规则安排住院。

现需解决如下问题：

问题一：分析确定合理的评价指标体系，用以评价该问题的病床安排模型的优劣。

问题二：就该住院部的情况，建立合理的病床安排模型，以根据当前状态来确定第二天应该入住的病人，并对所建立的模型利用问题一中的指标体系作出评价。

问题三：根据当时住院病人及等待住院病人的统计情况，在病人门诊时给出其大致入院时间区间。

问题四：若该住院部周六、周日不安排手术，重新解决问题二，并指出医院的手术时间安排是否应作出相应调整。

问题五：为便于管理，医院病床安排可采取使各类病人占用病床的比例大致固定的方案，就此建立使得所有病人在系统内的平均逗留时间（含等待入院及住院时间）最短的病床比例分配模型。

## 二、问题分析

眼科病床的安排问题实为典型的排队问题。其核心在于模拟病床的安排模型时，如何设计病床安排系统的运行规则，并给出合理的评价指标体系，对模型进行检验和评估。

为评价病床安排模型的优劣，考虑从病人和医院两个角度来共同确定评价指标体系。从病人的立场出发，关心的是等待入院时间，等待手术时间等。从医院的立场出发，关心的是每天医生完成手术的台数，病人在系统内的平均逗留时间，系统的稳定性与可持续性，病床使用率等。综合考虑两者的立场给出评价指标体系。

病人在系统中的逗留时间由等待入院时间、等待手术时间、术后观察时间构成。统计附录中的数据，发现各类病人等待入院的时间均为 12-13 天，但病人入院后等待手术时间相差很大。外伤病人一般在住院 1 天后即可进行手术；青光眼和视网膜疾病的病人大致在 2、3 天后能接受手术；比较异常的是白内障（单眼）

病人等待手术时间为 1-5 天，而白内障（双眼）病人等待手术时间为 1-7 天，但由题设知白内障病人的术前准备时间只需 1、2 天。

统计发现（详细数据见附件 1），白内障（单眼）病人术前等待时间由该病人在星期几入院惟一确定，如表 1。

表 1：一周内白内障（单眼）病人术前等待时间

	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
术前等待时间	2	1	5	4	3	2	1

分析原因，医院规定只在周一和周三进行白内障手术，但由于入院安排规则是 FCFS，那么被安排在周三入院的病人，至少要等到下周一才能进行手术，这使得病床被长久占用，浪费了医院资源，加重了病人的负担。白内障（双眼）病人也同样存在这个问题。青光眼和视网膜疾病的病人在一周内可做手术的时间有 5 天，但此类病人若周六（周一）入院，考察两天，刚好碰到周一（周三）不能手术，导致等待手术时间变成 3 天，同样拖延了住院时间。

因此，在设计病床安排模拟系统的规则时，应考虑尽可能使白内障（单眼）病人的入院时间为周二或周日，白内障（双眼）病人的入院时间为周六，青光眼和视网膜疾病的病人尽量避免安排在周一和周六。考虑在改进规则的约束下，建立以评价指标为多目标的优化模型，并将得到的指标与改进前的指标作对比。

为在病人门诊时给出其大致入院时间区间，可以先将医院当前状态（住院病人情况，等待病人情况）加入模拟系统运行，直至该病人入住为止，得到等待天数。对多次模拟得到的天数进行统计分析后，即可给出时间区间。

若住院部周六、周日不安排手术，那么，只需对病床安排模拟系统的运行规则作出调整：若某病人的手术时间被排在周六或周日时，则应考虑延后安排手术时间。

为方便管理，要求安排病床时各类病人占用病床的比例大致固定，并以所有病人在系统内的平均逗留时间最短为指标。考虑以平均逗留时间为指标，各类病人占用病床的比例为约束建立优化模型。

### 三、名词解释与变量符号说明

#### 3.1 名词解释

等待入院时间：病人从门诊到入院所等待的时间。

等待手术时间：病人从入院到接受第一次手术等待的时间，包括术前准备时间。

逗留时间：病人从门诊到出院所用的总时间，仅在病人出院后计算。

#### 3.2 符号说明

将各类病进行编号，如表 2 所示

表 2：各类病的编号

外伤	白内障（单眼）	白内障（双眼）	青光眼	视网膜疾病
1	2	3	4	5

其中，由于白内障分为单双眼，故分别编号。后文中提到的第  $i$  类病均是按照表 2 所给的顺序。

### 3.3 变量说明

表 3: 变量说明表

评价指标体系的符号	变量含义	单位
$I$	平均等待入院时间	天
$O$	平均等待手术时间	天
$W$	所有病人在系统内的平均逗留时间	天
$Z$	平均每周医生完成手术的台数	台
$Q$	平均每天等待入院人数的样本方差	

## 四、基本假设

- 1、由于视网膜疾病和青光眼的急诊数量较少，白内障一般无急诊，建模时除外伤外，其余眼科疾病不考虑急诊。
- 2、该医院眼科手术条件充分，在考虑病床安排时不考虑手术条件的限制。
- 3、附录中提供的 2008-07-13 到 2008-09-11 的病人信息真实可靠，具有代表性。
- 4、一天内到达医院门诊部的病人数量服从泊松分布（参考文献[1]）。

## 五、建模前准备

### 5.1 数据准备

附件中的病人信息数据有三块：

- D1. 门诊、入院、手术、已出院的病人
- D2. 门诊、入院、手术，但尚未出院的病人
- D3. 门诊，但尚未入院的病人

模拟医院运行需要产生的数据为：

1. 每天到达的各类病人数  $N_1, N_2, \dots, N_5$
2. 某病人从入院到手术需要的准备时间  $t_1$
3. 某病人从手术到出院所需的观察时间  $t_2$

根据基本假设，病人每天到达数量服从泊松分布，需要统计 D1、D2、D3 中的门诊情况，得到各类病人每日到达人数的均值  $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_5$ ，该值即用于产生泊松分布数据的  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$ 。

对于  $t_1$  和  $t_2$ ，由于不知道具体的分布，按照离散随机变量的通用方式产生，所以要从数据中得到频率值  $f$ 。 $f_{1ij}$  表示第  $i$  类病人，从入院到第一次手术的时间为  $j$  天的频率，该频率从 D1、D2 中的入院和第一次手术时间得到。 $f_{2ij}$  表示第  $i$  类病人，从手术到出院的时间为  $j$  天的频率，该频率从 D1 的第一次手术和出院时间得到。

设有  $R$  随机变量  $R \sim U(0,1)$ ，再根据得到的  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$ 、 $f_{1ij}$ 、 $f_{2ij}$  则可以算得各类数据。

#### 5.1.1 按泊松分布产生病人到达数据

设  $N$  为在一天内到达医院眼科门诊部的病人数，根据基本假设有  $N \sim P(\lambda)$ 。

将各  $\lambda$  值带入 MATLAB 的 poissonrnd 函数，即可得到某天病人流。

### 5.1.2 产生各类病人等待手术时间

将统计得到的各类病人等待手术时间的频率值  $f_1$  绘制成分布图，如图 1 所示。

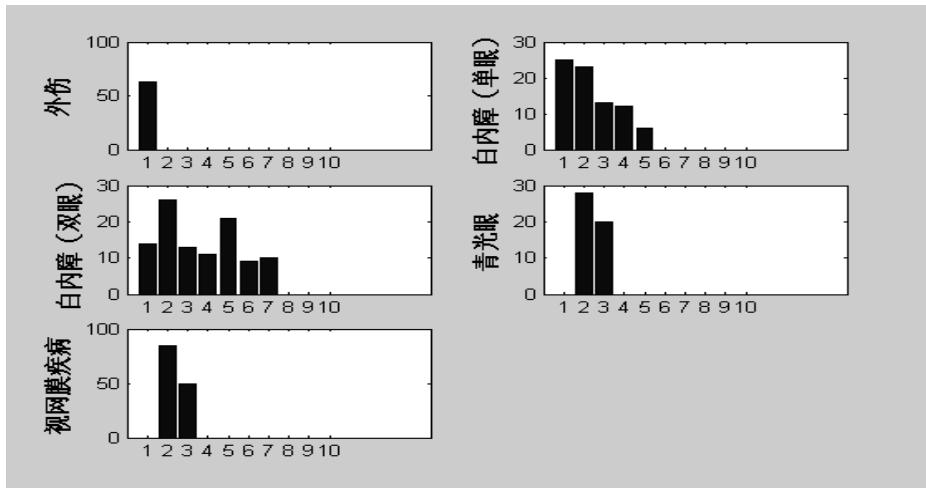


图 1：五类病人等待手术时间直方图

其中，横坐标表示等待的天数，纵坐标表示相应病人的数量。

根据图中可以看到，外伤病人一般在住院 1 天后即可进行手术。青光眼和视网膜疾病的病人大致在 2、3 天后能接受手术，其分布稍有差异。而白内障病人准备期的分布很散，与医学常理不符（一般白内障病人准备 1、2 天之后即可接受手术）。

为了更细致的分析产生这种结果的原因，对一星期内各天入住的病人的术前准备时间作统计，列出其人数分布（见附件 1）。

从表 23 中可以看到，对于每一种病，每列只有一个元素非零，即该类病人的术前准备时间由其入住的时间唯一确定。以视网膜疾病为例，除周六和周一入住的病人外，花掉的术前准备时间均为两天。对于周六入住的病人，即使两天就准备好了手术，也需要再多等一天，因为周一被该医院安排为仅做白内障的手术。

表 4：视网膜疾病病人术前准备时间分布表

准备天数	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
1	0	0	0	0	0	0	0
2	13	0	7	22	20	23	0
3	0	15	0	0	0	0	34

基于对此数据的分析，我们有充足的理由认为，实际上视网膜疾病的病人仅需要两天的准备时间，由于该医院的手术安排问题，导致了在某些天入住的病人需要三天的准备时间。对其他类病人也可以进行类似分析，得到各类病人的准备时间，如表 5。

表 5：各类病人实际术前准备时间表

病症	外伤	白内障 (单眼)	白内障 (双眼)	青光眼	视网膜 疾病
$t_1$	1	1	1	2	2

### 5.1.3 产生病人从手术完毕到出院的时间

不同类型的病人从第一次手术后到出院的时间差异较大, 如图 2

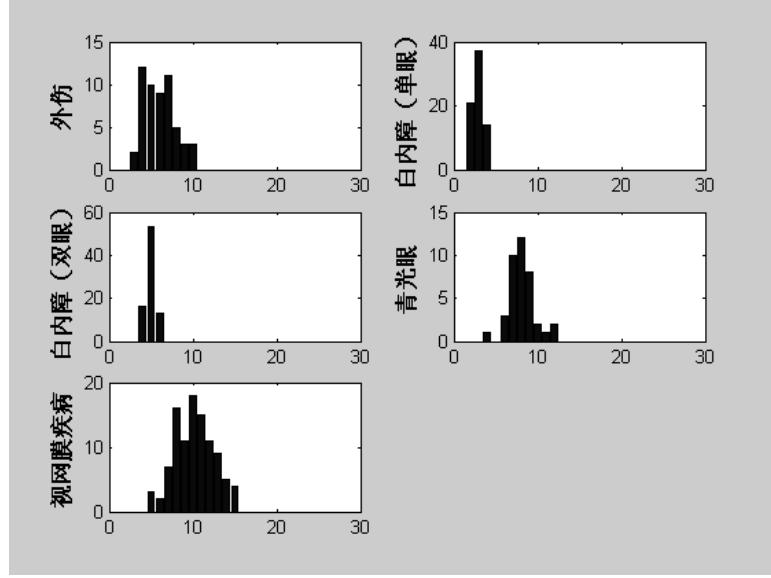


图 2: 各类病人术后观察时间分布图

其中, 横坐标表示等待的天数, 纵坐标表示相应病人的数量。  
对统计到的频率值  $f'_{2ij}$  作累加有

$$f'_{2ij} = \sum_{k=0}^j f_{2ik} ,$$

寻找使均匀分布随即变量  $R$  满足

$$f'_{2i,j-1} < R \leq f'_{2ij}$$

的  $j$  值, 并令

$$t_2 = j .$$

显然, 该  $t_2$  与  $i$  类病人从入院到手术的准备时间是同分布的。

双眼白内障病人虽然需要进行两次手术, 但根据医院的安排, 周一做一只眼, 周三再做一只眼。即一旦确定了第一次手术, 第二次手术的时间也相应确定, 相应于做单眼的病人来说, 会多花掉固定的两天。将这两天的时间考虑在病人从第一次手术后需要的观察时间内, 则各类病人从手术到出院的时间可以统一地表达为  $t_2$ 。

## 5.2 医院的病人住院情况的模拟

医院的病人住院情况是一个运行机理清晰的系统。如图 3 所示, 每天, 已治愈的病人出院, 空出床位, 医院根据某种安排住院的规则(如先到先服务(FCFS)等)让等待住院的一些病人入住这些床位; 同时, 将当日门诊接待的病人加入等待住院病人的队列, 这即是每日医院的模拟运行的过程。通过模拟一段时间的运行, 可统计得这段时间内, 模拟系统中每日的病床信息以及等待病人的队列信息等, 计算需要的指标体系, 评价安排住院规则的优劣。

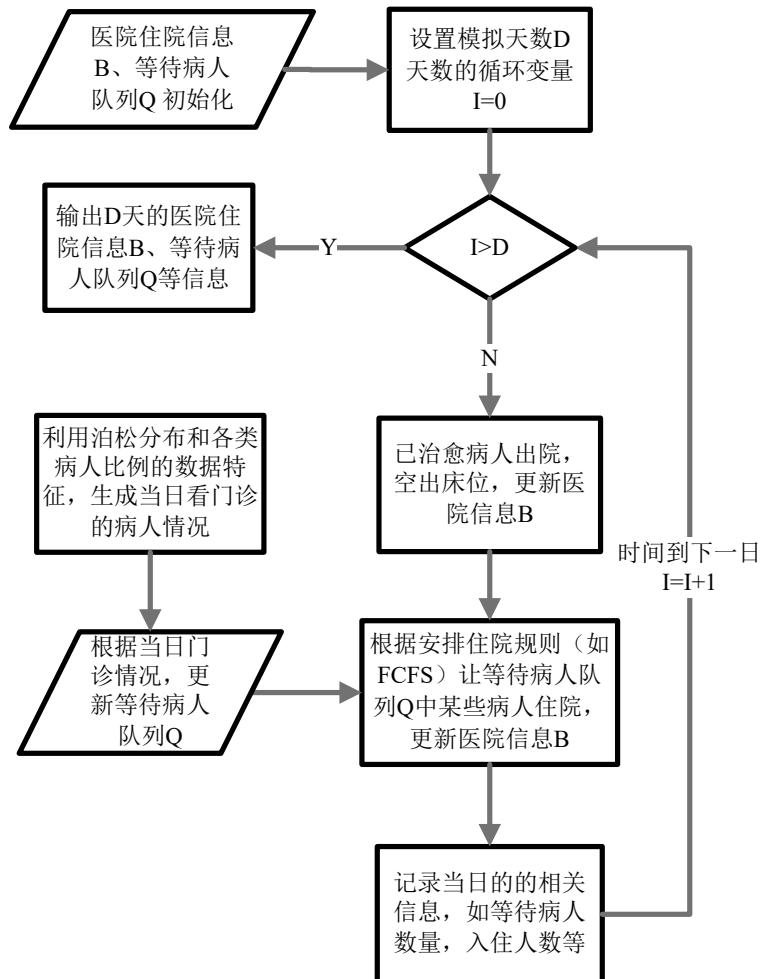


图 3: 医院病床分配系统算法流程图

## 六、模型建立和求解

### 6.1 评价指标的分析与确定

#### 6.1.1 符号说明

$T$ : 该系统的总的运行时间。

$G$ : 考察期间通过该系统的病人总数。

$a_i, b_i, c_i, d_i$ : 第  $i$  个病人的门诊时间, 入院时间, 第一次手术时间、出院时间。

$h_j$ : 医院第  $j$  天完成的手术台数。

$l_j$ : 第  $j$  天的等待入院的人数。

#### 6.1.2 平均等待入院时间

当病人门诊过后, 由于医院床位的紧缺, 需要等待一段时间才能入住。该段时间的病人非常焦虑, 其等待入住的时间长短是衡量一个调度方案好坏的重要指标。所以设计病床分配系统的时候, 应该以平均等待入院时间最小为目标。计算方法为:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^G (b_i - a_i)}{G},$$

其中,  $b_i$  为病人入院的时间,  $a_i$  为病人口服的时间,  $G$  为总人数。

### 6.1.3 平均等待手术时间

当病人入院后,首先应当进行充分的术前准备,其中,外伤和白内障病人需要1天,其他病人需要2天(分析见5.1.2)。除了术前准备时间外,由于该医院的手术时间安排问题,使得一些病人的手术需要推迟一段时间,造成病人住院的等待手术时间的延长,浪费了病人的时间和金钱,也降低了医院资源的有效利用率。一个设计优良的病床分配系统应该以平均等待手术时间最小为目标。计算方法为:

$$O = \frac{\sum_{i=1}^G (c_i - b_i)}{G},$$

其中,  $c_i$  为第一次手术时间,  $b_i$  为病人入院时间,  $G$  为总人数。

### 6.1.4 平均逗留时间

整体上考虑病人从门诊到出院的过程,虽然不同病人所需的术后观察时间不相同,但对较长时间内到该医院就诊的所有病人的耗时求取平均,仍然可以从统计意义上反应该系统的效率。设计病床分配系统时,应该以平均逗留时间最小为目标。计算方法为:

$$W = \frac{\sum (d_i - a_i)}{G},$$

其中,  $d_i$  为病人出院时间,  $a_i$  为病人口服时间,  $G$  为总人数。

### 6.1.5 平均每周医生完成手术的台数

因为该医院的手术能力相对于当前的床位是充裕的,所以好的床位安排策略应该提高医院的手术效率。由于手术时间的安排是以一个星期为周期的(如白内障只在周一、周三),故考察周均完成手术台数更具有意义。设计该系统,应该以周均完成手术台数最大为目标。计算方法为:

$$Z = \frac{\sum h_j}{\frac{1}{7}T},$$

其中,  $h_j$  为每日完成手术台数,  $T$  为考察的系统时间。

### 6.1.6 系统的稳定性

对任何一个系统进行长期考察,都需要关注其稳定性。就该医院的实际情况来看,等待入院的队列长度是主要矛盾,随着时间的增加,原来的FCFS策略使得该队列的长度迅速增加。而一个设计良好的系统应该使得该队列长度维持在较小的水平上,且波动并不明显,所以可以用每天等待入院队列长度的样本方差 $Q$ 作为系统稳定性的描述。设计病床分配系统的目标是使得该系统在长期模拟中稳定性较高,也就是 $Q$ 较小。计算方法为:

$$\bar{l} = \frac{1}{T} \sum l_j$$

$$Q = \frac{1}{T-1} \sum (l_j - \bar{l})^2,$$

其中,  $l_j$  为每日等待入院的人数,  $T$  为考察的系统时间,  $\bar{l}$  为等待入院人数的样本均值。

### 6.1.7 指标体系的确定

经过 6.1.2 到 6.1.6 的分析, 选取了衡量医院病床分配系统的 5 个重要指标, 整理如表 6。

表 6: 评价指标体系

指标	表达式
平均等待入院时间 $I$	$I = \frac{\sum_{i=1}^G (b_i - a_i)}{G}$
平均等待手术时间 $O$	$O = \frac{\sum_{i=1}^G (c_i - b_i)}{G}$
平均逗留时间 $W$	$W = \frac{\sum_{i=1}^G (d_i - a_i)}{G}$
平均每周医生完成手术的台数 $Z$	$Z = \frac{\sum h_j}{\frac{1}{7}T}$
系统的稳定性 $Q$	$Q = \frac{1}{T-1} \sum (l_j - \bar{l})^2$

## 6.2 模型一: 基于延迟矩阵和优先级矩阵的病床安排模型

### 6.2.1 符号说明:

**D**: 延迟矩阵, 其元素为  $d_{ij}$ , 表示第  $i$  类病人如果被安排在周  $j$  作手术, 则其真正手术时间会被推后的天数,  $i=1..5, j=1..7$ 。

**P**: 优先级矩阵, 其元素为  $p_{ij}$ , 表示第  $i$  类病人在周  $j$  安排入住时, 具备的优先级, 满足  $1 \leq p_{ij} \leq 5$ , 且为整数,  $i=1..5, j=1..7$ 。

$m(\mathbf{D}, \mathbf{P})$ : 模拟系统, 给定延迟矩阵和优先级矩阵, 该系统返回系统指标。

$M$ : 模拟次数。

$I_k, O_k, W_k, Z_k, Q_k$ : 第  $k$  次模拟得到的平均等待入院时间, 平均等待手术时间, 病人在系统内的平均逗留时间, 周均完成手术的台数, 系统稳定性指标。其定义及详细说明见 6.1。

$\bar{I}, \bar{O}, \bar{W}, \bar{Z}, \bar{Q}$ : 经过多次模拟, 各项指标的平均值。

### 6.2.2 使用延迟矩阵描述系统:

该医院眼科病床系统的复杂性主要体现在手术时间的安排上。根据安排, 白内障手术仅在周一和周三进行, 而在这两天不进行其他的手术。如有白内障病人在周三到达, 则至少要等到下周一才能作手术。如有非白内障病人, 在周一前已经做好了术前准备, 则至少要多等待一天, 直到周二才能进行手术。

为了更直观地描述系统, 引入延迟矩阵的概念, 它的每个元素表示: 如果第  $i$  类病人被安排在周  $j$  作手术, 其真正的手术时间将被推迟的天数。以双眼白内障为例, 由于只能在周一进行第一次手术, 当该病人在星期二做好术前准备时,

只能推迟到下周一才能实施手术，即延迟 6 天，对应的元素为

$$d_{33} = 6,$$

相应的，如果  $i$  类病人在周  $j$  能够接受手术，那么对应的元素为

$$d_{ij} = 0.$$

与该医院现行手术时间安排对应的延迟矩阵如表 7

表 7：延迟矩阵表

$d_{ij}$	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
外伤	0	0	0	0	0	0	0
白内障（单眼）	1	0	1	0	4	3	2
白内障（双眼）	1	0	6	5	4	3	2
青光眼	0	1	0	1	0	0	0
视网膜疾病	0	1	0	1	0	0	0

### 6.2.3 使用优先级矩阵描述病床分配策略：

由于医院关于手术时间的安排具有专业上的理由，故不考虑时间安排上的调整。即只在周 1 和周 3 做白内障手术，且在这两天不做其他手术（除急诊外）。

经过前期的问题分析，得知医院现行策略效率低下的主要原因在于，该医院对待所有病人（急诊除外）、以及一周的各天都按照相同的 FCFS 方式安排入院，不同病人在不同时间入住产生的大量的额外术前准备时间。

为改进原来安排方式的不足，考虑对不同病症在一周的 7 天中设置不同的优先级。在安排病人某天入住的时候，先让优先级最高的病人进入，有空余床位的时候，再让优先级次高的病人进入，以此类推。

#### 6.2.3.1 系统的基本运行规则

A. 外伤病人为急诊，在任何情况下，只要有床位即让入住。

B. 为了保证急诊病人一定能入住，可以考虑先统计出急诊病人的数量分布，预留一定的床位。如果每日出院人数在统计上明显大于急诊病人数量，则可以不用考虑这种预留（当天接待的急诊病人一定可以在第二天安排入住）。

C. 由于双眼白内障要在周一进行第一次手术，所以安排在周日入住为最佳时间，即周日时双眼白内障的优先级最高（除急诊外）。考虑到周一到周六入住的双眼白内障病人，只能等到第二周手术，所以其优先级从周六到周一不断降低。

D. 单眼白内障可在周一或周三手术，则按照 C 的分析，最佳安排时间是周日或者周二，这两天的优先级最高，周一次之，而周三到周五的优先级最低。同时，由于其比双眼白内障有更多的安排机会，所以在周六和周日的优先级比双眼白内障低。

E. 在同优先级的病人中，按照 FCFS 的方式分配床位。

对题中数据进行分析，发现日均到达的外伤病人数为 1.05 人，而日均出院人数为 7.08 人。在统计意义上，日均出院人数明显大于日均到达的外伤人数，所以可以不用考虑规则 B 的设置。

#### 6.2.3.2 优先级矩阵列表的制定

按照规则 A、C、D 所描述的规则，制定的优先级矩阵如表 8 所示。

表 8: 优先级矩阵表

$p_{ij}$	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
外伤	5	5	5	5	5	5	5
白内障（单眼）	3	4	4	2	1	1	2
白内障（双眼）	4	1	1	1	2	2	3
青光眼	?	?	?	?	?	?	?
视网膜疾病	?	?	?	?	?	?	?

表中标注问号的部分，即是应该通过求解确定的变量。这些元素为模型中的优化变量，只要寻找到了使得系统指标达到最优的优先级矩阵，即寻找到了针对该医院的最优病床安排策略。

#### 6.2.4 模型建立

在给出了系统的评价指标，且用延迟矩阵对系统进行刻画，用优先级矩阵对策略进行刻画之后，可以很容易的得到多目标优化模型：

$$\begin{aligned} \min \bar{I} &= \sum_{i=1}^M I_i, \min \bar{O} = \sum_{i=1}^M O_i, \min \bar{W} = \sum_{i=1}^M W_i, \max \bar{Z} = \sum_{i=1}^M Z_i, \min \bar{Q} = \sum_{i=1}^M Q_i \\ \text{s.t.} \\ (I_i, O_i, W_i, Z_i, Q_i) &= m(\mathbf{D}, \mathbf{P}) \end{aligned}$$

其中，系统指标的最优性为优化目标，延迟矩阵  $\mathbf{D}$  为约束条件，优先级矩阵  $\mathbf{P}$  为优化变量。由于医院病床系统十分复杂，无法推知优化变量与系统指标之间的函数关系式，所以使用 MATLAB 对该系统进行模拟，由模拟系统  $m(\mathbf{D}, \mathbf{P})$  返回各项系统指标。为降低随机模拟对解的影响，重复模拟  $M$  次，对各项指标求平均，选取使得平均系统指标较好的优先级矩阵作为最优解。

#### 6.2.5 模型求解：

分析选取的 5 项指标，可发现它们实质上是正相关关系。比如减少了平均等待入住时间，同时也可以减少平均逗留时间。而当系统效率提高后，可以在较长时间维持较短的等待入院队列，则系统稳定性可以提高（每天等待入院人数的方差减小）；其他各指标之间也存在这样的关系。

为简化求解过程，选取平均等待入院时间  $\bar{I}$  作为优化目标，求解得到最优规则。将得到的最优规则同普通的 FCFS 规则进行对比，只要在各项指标上均有改进即可。简化后的单目标模型为：

$$\begin{aligned} \min \bar{I} &= \sum_{i=1}^M I_i \\ \text{s.t.} \\ (I_i, O_i, W_i, Z_i, Q_i) &= m(\mathbf{D}, \mathbf{P}) \end{aligned}$$

该模型中，仅优先级矩阵的最后两行无法确定，而每列的优先级数必须覆盖从 1 到 5 的各个等级。所以对于每一列的最后两行，可以考虑的情况只有两种。总的情况数为  $2^7 = 128$  种。

对所有情况进行全枚举，模拟 2008 年 9 月 12 日到 2008 年 12 月 1 日医院运行，得到最优的平均等待入院时间为 6.0752 天，相应的优先级矩阵如表 9

表 9: 优先级矩阵

$p_{ij}$	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
外伤	5	5	5	5	5	5	5
白内障(单眼)	4	4	4	2	1	2	3
白内障(双眼)	3	1	1	1	2	3	4
青光眼	2	3	3	4	3	4	1
视网膜疾病	1	2	2	3	4	1	2

将该方案与原来的病床分配方案作比较, 模拟从 2008 年 9 月 12 日到 2009 年 12 月 1 日, 其平均指标及改进程度如表 10 所示。

表 10: 优先级矩阵分配法与 FCFS 法的对比

指标	优先级矩阵分配法	普通 FCFS	改进程度
平均等待入院时间 $\bar{I}$	3.2986	12.876	降为 $1/4$
等待手术时间 $\bar{O}$	2.003	2.5239	20.64%
平均逗留时间 $\bar{W}$	12.251	21.985	44.28%
周均完成手术数 $\bar{Z}$	61.968	59.556	4.05%
系统稳定性 $\bar{Q}$	352.14	1182.5	3.36 倍

从该表可以看出, 寻求的 5 大评价指标均有改进: 平均入院时间约为改进前的  $\frac{1}{4}$ , 平均逗留时间比改进前减少了 44.28%, 系统稳定性提高到原来的 3.4 倍。

将两种分配方法的医院每日等待入院人数绘制如图 4, 可见, 基于优先级矩阵的病床分配大大减少了等待病人队列的长度, 在医院的现有规模下, 基本解决了病人看病等待久的难题。

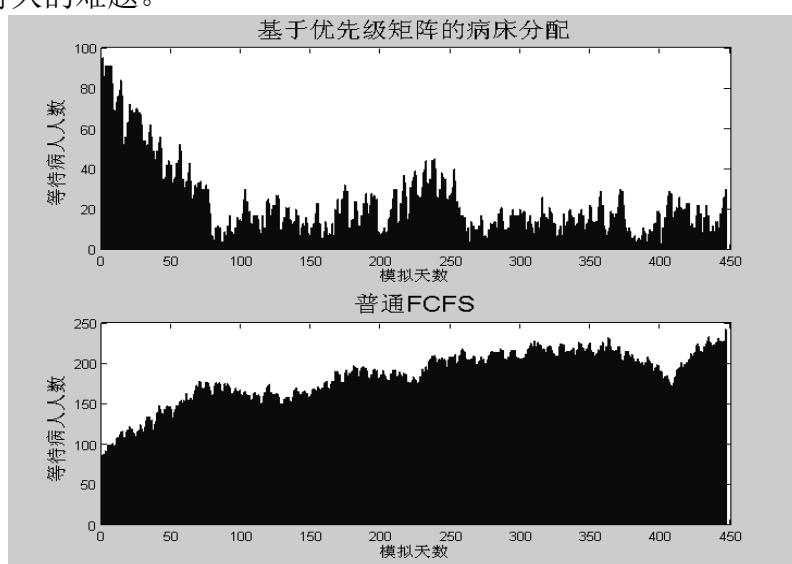


图 4: 基于优先级矩阵的分配法与 FCFS 的每日等待入院人数比较

### 6.3 模型二：入住时间区间模型

#### 6.3.1 符号说明：

$T_i$ ：第  $i$  次模拟返回的等待入住时间。

$M$ ：总共的模拟次数。

$k$ ： $T_i$ 所有可能取值的种数。

#### 6.3.2 模型建立：

根据 6.2 的建模，得到了医院安排病人入住的规则。当有病人询问入住时间的时候，仅需要将医院当前的状态（床位使用情况、等待病人情况）代入模拟系统，设置模拟上限天数，按照当前病床分配规则分配病床，直至该病人入住为止，即可得到该次模拟的等待入住时间  $T_i$ 。

对于正常的医院安排入住规则，多次模拟的  $T_i$  会稳定地落在有限的  $k$  种可能取值上，因此可以在病人门诊时即告知其大致入住时间。

#### 6.3.3 模型求解：

模拟得到等待时间  $T_i$  的算法流程为：

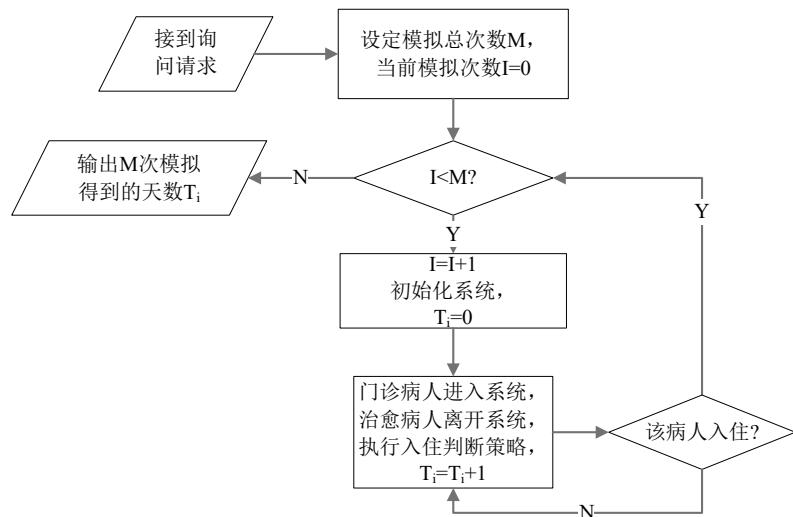


图 5：入住时间求解算法流程

依照流程图 5，得到该病人  $M$  次模拟的等待入住时间  $T$ ， $T_i$  稳定地落在  $k$  种可能取值上。以 9 月 12 日到达的青光眼病人为例，根据第二问中的优先级矩阵方式安排住院规则，进行 100 次模拟（见图 6），从图中可见， $T$  仅有三种可能取值，该病人的大致入住时间区间为 4—7 天后，其中 5 天后入住的可能性非常大。

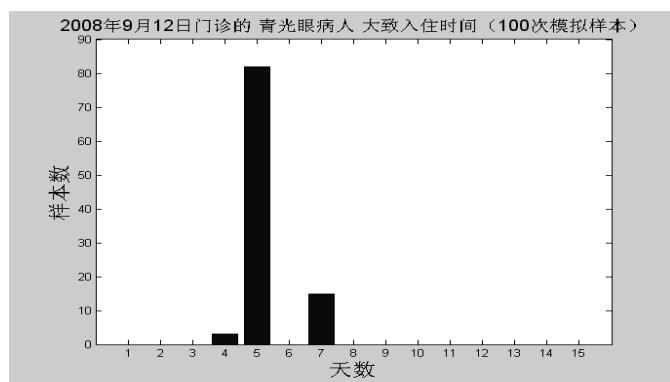


图 6：某病人可能的入住时间分布图

## 6.4 模型三：双休日无手术的病床分配模型

### 6.4.1 双休日无手术的延迟矩阵设定

考虑双休日无手术的情况，与模型一的建模方式相比，差异仅在于此时的延迟矩阵  $\mathbf{D}$  不同，即将原计划周六周日做的手术全部推迟到至少周一才能做。对应的延迟矩阵见表 11

表 11：延迟矩阵表

$d_{ij}$	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
外伤	0	0	0	0	0	0	0
白内障（单眼）	1	0	1	0	4	3	2
白内障（双眼）	1	0	6	5	4	3	2
青光眼	2	1	0	1	0	0	3
视网膜疾病	2	1	0	1	0	0	3

其中，白内障病人对应的行没有改变，因为在之前的时间安排中，并不在周六和周日进行手术。青光眼和视网膜疾病本应安排于周六或者周日做的手术一并被推迟到下周二，因为下周一仍然被白内障手术占据。

### 6.4.2 模型建立

与模型 6.2 相同，以平均等待入院时间为优化目标，延迟矩阵为约束，优先级矩阵为优化变量，得到的优化模型为：

$$\begin{aligned} \min \bar{I} &= \sum_{i=1}^M I_i \\ \text{s.t.} \\ (I_i, O_i, W_i, Z_i, Q_i) &= m(\mathbf{D}, \mathbf{P}) \end{aligned}$$

### 6.4.3 模型求解

同样对可行的优先级矩阵做全枚举，得到的最小等待入院时间为 7.5689，相应的优先级矩阵为：

表 12：优先级矩阵表

$P_{ij}$	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
外伤	5	5	5	5	5	5	5
白内障（单眼）	3	4	4	2	1	1	2
白内障（双眼）	4	1	1	1	2	2	3
青光眼	1	3	2	3	3	3	1
视网膜疾病	2	2	3	4	4	4	2

在该优先级矩阵下，模拟模拟从 2008 年 9 月 12 日到 2009 年 12 月 1 日的系统指标为：

表 13 改变时间安排前的系统指标

$\bar{I}$	$\bar{O}$	$\bar{W}$	$\bar{Z}$	$\bar{Q}$

14.155	2.7009	23.192	58.933	2166.4
--------	--------	--------	--------	--------

#### 6.4.4 调整手术安排时间:

由于周六和周日不能进行手术,使得安排在周四周五的病人至少等到下周一。对于非白内障病人来说,至少等到下周二,这样会造成优先级上的冲突。以周日为例,由于白内障双眼病人需要等待1天,应该给予高优先级,而正好非白内障病人需要等待2天,以在周二进行手术,也应当给予高优先级。同时,在周四和周五,各种病都占据低优先级。

为了充分利用医院的资源,将此矛盾分离。考虑将除白内障外的病症安排在一周的前面进行手术,则可以充分利用周六周日不作手术的特点,让该类病人进行等待。

表 14: 延迟矩阵表

$d_{ij}$	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
外伤	0	0	0	0	0	0	0
白内障(单眼)	3	2	1	0	1	0	4
白内障(双眼)	3	2	1	0	6	5	4
青光眼	1	0	0	1	0	1	2
视网膜疾病	1	0	0	1	0	1	2

#### 6.4.5 调整手术时间后的优先级矩阵:

由于延迟矩阵的改变,相应的优先级矩阵也随之改变,具体计算规则见 6.2.3。得到的优先级矩阵见表 15。

表 15: 优先级矩阵表

$p_{ij}$	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
外伤	5	5	5	5	5	5	5
白内障(单眼)	1	1	1	4	4	2	2
白内障(双眼)	2	3	4	1	1	1	1
青光眼	?	?	?	?	?	?	?
视网膜疾病	?	?	?	?	?	?	?

#### 6.4.6 对比调整前后的结果:

调整时间后搜索得到的优先级矩阵见表 16。

表 16: 优先级矩阵表

$p_{ij}$	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
外伤	5	5	5	5	5	5	5
白内障(单眼)	1	1	1	4	4	2	2
白内障(双眼)	2	3	4	1	1	1	1
青光眼	3	4	2	2	2	4	4
视网膜疾病	4	2	3	3	3	3	3

将调整前后的方案作比较，模拟从 2008 年 9 月 12 日到 2009 年 12 月 1 日，其平均指标及对比如表 17。

表 17：调整时间前后的系统指标对比表

指标	调整前	调整后	比较
平均等待入院时间 $\bar{I}$	14.155	5.5225	减少为 $1/4$
等待手术时间 $\bar{O}$	2.7009	2.1091	减少 $28.06\%$
平均逗留时间 $\bar{W}$	23.192	14.541	减少 $59.49\%$
周均完成手术数 $\bar{Z}$	58.933	61.886	提高 $4.77\%$
系统稳定性 $\bar{Q}$	2166.4	915.83	提高为 2.3 倍

经过对比，发现调整手术时间之后，该系统的各项指标均有明显改进。

#### 6.4.7 模型结论

为了使得在双休日条件下，该医院系统具有较好的评价指标，应该将优先级矩阵调整为如表 16；将延迟矩阵调整为表 14，即将白内障手术时间改变为周三和周五，其它手术时间（除急症）安排在周一、二、四。

### 6.5 模型四：病床比例分配模型

#### 6.5.1 符号说明：

$q_i$ ：分给第  $i$  类病人的病床数；

$\alpha_i$ ：第  $i$  次模拟得到的病人平均逗留时间；

$\bar{\alpha}$ ：多次模拟后的病人平均逗留时间的均值；

$M$ ：模拟的总次数；

$m(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ ：模拟系统，给该系统传入所需参数，返回系统的统计指标；

$N$ ：医院总床位数，本题中取 79。

#### 6.5.2 模型建立：

根据模拟系统的输入输出关系，有约束：

$$\alpha_i = m(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5),$$

由于病床的数量不得超过医院总床位数，有约束：

$$\sum_{i=1}^5 q_i = N,$$

该医院必须接待各类病人，显然每类病人都应该分配有床位，有约束：

$$q_i \geq 1, i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

整理得到优化模型：

$$\min \bar{\alpha} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha_i$$

s.t.

$$\alpha_i = m(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$$

$$\sum_{i=1}^5 q_i = N$$

$$q_i \geq 1, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

### 6.5.3 模型求解

由于对床位的 5 段划分总共有  $C_{78}^4 = 1426425$  种情况, 计算量非常大, 考虑进行 1000 次随机优化, 得到的最优解为:

表 18: 某次随机优化得到的最优解

外伤	白内障 (单眼)	白内障 (双眼)	青光眼	视网膜疾病
18	3	34	23	1

对该方案下的系统进行稳定性分析(图 7)发现, 这种严重分配不均的比例, 虽然使病人的平均逗留时间缩短了(根据平均逗留时间的定义(名词解释 3), 未入院的病人并不计算在内), 但其中视网膜疾病的病床比例远远低于其他病症, 导致该类病人的就医难度相当大, 等待就医的人数越来越多。

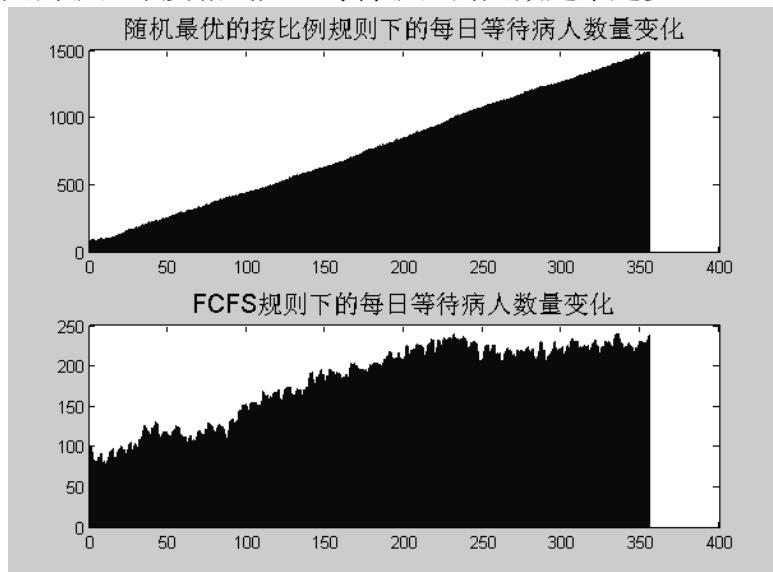


图 7: 随机最优的比例分配规则与 FCFS 的对比

可见, 在 6.5.2 的模型的约束下得到的最优解并不能应用于实际医院病床管理, 需要考虑增加符合医院情况的约束。

统计得到的 2008 年 7 月 13 日到 2008 年 9 月 11 日各类病人日均在院人数, 如表 19。

表 19: 各类病人日均在院人数表

外伤	白内障 (单眼)	白内障 (双眼)	青光眼	视网膜疾病
10	15	20	9	25

由于医院要考虑为各类病人进行手术, 所以安排病床比例的时候应该在统计

的日均在院人数的附近。给定每类床位 10% 的上下波动空间, 得到增加约束后的病床比例分配模型:

$$\begin{aligned}
 \min \bar{\alpha} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha_i \\
 \text{s.t.} \\
 \alpha_i &= m(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \\
 \sum_{i=1}^5 q_i &= N \\
 q_i &\geq L_i, i = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 q_i &\leq U_i, i = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 L_i &= \lfloor q_i^* \times 0.9 \rfloor, i = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 U_i &= \lceil q_i^* \times 1.1 \rceil, i = 1, 2, 3, 4, 5
 \end{aligned}$$

该约束下的可行解数量较少, 数量小于  $\prod_i (U_i - L_i)$ , 可以使用全枚举的方式, 得到最优解 (表 20) 为:

表 20: 病床分配的最优比例

外伤	白内障 (单眼)	白内障 (双眼)	青光眼	视网膜疾病
10	15	20	11	23

按照该比例分配床位, 与医院原始的 FCFS 规则作比较。

表 21: 病床比例分配模型与 FCFS 的对比

指标	FCFS	按比例分配
平均等待入院时间 $\bar{I}$	11.3610	10.4358
等待手术时间 $\bar{O}$	2.5903	2.3233
平均逗留时间 $\bar{W}$	20.4728	18.3899
周均完成手术数 $\bar{Z}$	58.4545	53.2727
系统稳定性 $\bar{Q}$	260.9987	15995.5429

其中, 表 21 中系统稳定性  $\bar{Q}$  是长期 (模拟 1 年左右) 的数据, 其余均是短期 (模拟 3 个月左右) 的数据。

将表 21 的前三行进行对比, 发现按比例分配床位在短期内略优于 FCFS, 但系统稳定性一行表明, 这种按比例分配床位的规则在医院长期经营中并不合适。

从表 21 第四行可以发现, 实际周均完成的手术数量减少了, 统计各类病床的利用率如表 22。

表 22: 给类病床利用率表

	外伤	白内障 (单眼)	白内障 (双眼)	青光眼	视网膜疾病
各类病的病床使用率	68%	81%	95%	100%	100%

表 22 表明医院中外伤等病的床位利用率相对较低, 所以这种按比例分配床

位规则未能充分利用医院拥有的所有开放床位。

## 七、模型的评价与改进方向

### 7.1 模型的评价

- 1、本文从病人和医院两方面考虑，选取了合理的评价指标体系；通过深入分析题目中病人的数据信息，确定了模拟系统中需要的各种分布的参数；根据医院调配病人住院出院的机理，模拟医院运行，统计相关指标信息，针对病床安排的规则，给出综合的指标评价。
- 2、引入手术时间的延迟矩阵，使得问题二和问题四的模拟系统得到统一，而且使医院可以方便地对各类病的手术时间作出修改。
- 3、优先级矩阵的设计使得各种分配策略的描述得到统一。
- 4、模型二（入住时间区间模型）中，通过多次模拟，得到病人的可能入住时间比较集中，入住时间区间可以信服。

### 7.2 模型的改进方向

- 1、实际情况中，视网膜疾病和青光眼仍有少量属于急诊，在系统模拟时增加考虑这一条件可使得模型更符合实际。
- 2、由问题五得到的模型，其病床利用率较低。可以考虑根据医院的实际布局，增加部分共用床位，在便于管理的同时，也可以提高病床利用率。

## 八、参考文献

[1] 梁之舜、邓集贤等，概率论及数理统计，北京：高等教育出版社，2008 年，第 2 版。

## 九、附件清单

- 附件 1 一星期各天入住的病人的术前准备时间统计表（2008-07-13-2008-09-11）
- 附件 2 医院模拟系统的程序清单、简要说明及部分模块代码
- 附件 3 其它部分程序清单和简要说明

## 九、附件

### 附件 1—星期各天入住的病人的术前准备时间统计表（2008-07-13-2008-09-11）

表 23：一星期各天入住的病人的术前准备时间统计表

外伤							
准备天数	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
1	4	10	10	6	12	9	12
白内障（单眼）							
准备天数	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
1	14	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	26
3	0	0	0	0	0	13	0
4	0	0	0	0	11	0	0
5	0	0	0	21	0	0	0
6	0	0	9	0	0	0	0
7	0	10	0	0	0	0	0
白内障（双眼）							
准备天数	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
1	19	0	6	0	0	0	0
2	0	6	0	0	0	0	17
3	0	0	0	0	0	13	0
4	0	0	0	0	12	0	0
5	0	0	0	6	0	0	0
青光眼							
准备天数	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
1	0	0	0	0	0	0	0
2	6	0	3	6	5	8	0
3	0	5	0	0	0	0	15
视网膜疾病							
准备天数	星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
1	0	0	0	0	0	0	0
2	13	0	7	22	20	23	0
3	0	15	0	0	0	0	34

### 附件 2 医院模拟系统的程序清单、简要说明及部分模块代码

1.SimuHospital.m

1.1 功能：医院模拟的主体程序，从 2008 年 9 月 12 日开始模拟。

```
function [ aveWaitTime , aveWaitOperationTime , aveStayTime , sumWeekOperation ,
totalWaitInHos ] = SimuHospital_final( RuleFunction )
```

1.2 输入参数：1 个，医院安排病床的规则函数句柄。

1.3 输出参数：5 个，病人平均等待入院时间，平均等待手术时间，平均逗留时间，每周医生的手术个数，每日等待入院的队列人数。

1.4 程序简要说明：这是一个通用的医院病床分配模拟程序，它使用一个通用的病床安排规则函数接口，医院可以很方便的带入自己的安排病床规则（如 FCFS），便可模拟一段时间内医院的运行状况。程序中，统计了诸如每日门诊人数、每日住院人数等十余种信息，可以方便的处理并返回医院需要考察的某些指标。

## 1.5 程序中重要变量说明

### 1.5.1 医院病床状态 bedState(BedsNum,4)

题目中这是一个 79 行 4 列的矩阵，每一列对应如下信息：

% 79 张病床的占用状态（0—空 or 1—满）

% 住的是何类病人（1—5 对应（'外伤'，'白内障（单眼）'，'白内障（双眼）'，'青光眼'，'视网膜疾病'））

% 预计 x 天后出院（相对时间）

% 该病人看门诊的时间（绝对时间,excel 格式）

### 1.5.2 等待的病人队列（已看过门诊但尚未住院）waitQueue(X, 5)

因为等待病人的数量未知，所以这是一个行数动态变化的矩阵，每一行代表一个等待病人的信息，每一列对应如下信息：

% 等待的病人是何病（1—5 对应（'外伤'，'白内障（单眼）'，'白内障（双眼）'，'青光眼'，'视网膜疾病'））

% 看门诊时间（绝对时间,excel 格式）

% 预计住院的总时间（相对时间）= t1+t2；t1（术前准备时间）= 第一次手术—入院；t2（术后恢复时间）= 出院—第一次手术

% 等待病人的编号

% 术前准备时间 t1

## 1.6 重要程序模块的部分源代码

### 1.6.1 主体医院模拟流程模块

```
beginday = m2xdate( datenum(2008,9,12)) ; % 设定模拟的起始日期
```

```
endday = m2xdate( datenum(2009,9,1)) ; % 设定模拟的终止日期
```

% 设置 2008-9-11 日的医院病床的初始住院情况和门诊等待队列

```
[ bedState waitQueue ] = set_911_state( bedState ) ;
```

% 从起始日到终止日开始模拟

```
for day=beginday:endday
```

    % 出院操作：扫描 79 张病床，让预计还有 0 天出院的病人出院，更新一系列统计量

```
    for k=1:BedsNum
```

```
        if bedState(k,3)==0
```

```
            totalWaitTime( OutPatientTotalNum )=day-bedState(k,4); % 出院病人
```

的逗留时间

```

OutPatientTotalNum = OutPatientTotalNum+1 ; % 出院病人总数加 1
outHosPatients(day-beginday+1) =
    outHosPatients(day-beginday+1)+1; % 今日出院病人总数加 1
    bedState(k,:) = 0 ; % 置病床状态为空
end
end
% 更新病床状态, 其中包括调用安排病床的规则函数让等待中的病人入住
[ bedState , waitQueue , inHosPatients(day-beginday+1) ] =
    updateBedState( bedState , waitQueue , day ) ;
bedState(:,3) = bedState(:,3)-1 ; % 在当日结束时, 减少所有在床病人的预计
出院时间
actualBeds(day-beginday+1) = sum( bedState(:,1)==1 ) ; % 当日床位的使用数
% 更新病人等待队列, 包括加入当日看过门诊的新病人
waitQueue = updateWaitQueue( waitQueue , day ) ;
totalWaitInHos(day-beginday+1) = size(waitQueue,1) ; % 当日的等待病人数
for k=1:5      % 统计当日院内的各类病人数
    dayPatient(day-beginday+1,k) = size( find( bedState(:,2)==k ) , 1 ) ;
end
end

```

### 1.6.2 更新病床状态函数模块 updateBedState( bedState , waitQueue , day ) ;

```

% 执行安排规则函数, 获得安排入院的病人编号
temp = feval( RuleFunc , bedState , waitQueue , day ) ;
% 中间略去若干边界判断
for k=1:BedsNum
    if bedState(k,1) == 0
        [ row ignore ] = find( waitQueue(:,4) == temp(1) ) ; % 要入院的病人依次
安排入院
        temp = pop_front( temp ) ; % 减少待入院病人序列
        bedState(k,:) = [ 1 waitQueue(row,[ 1 3 2 ]) ] ; % 病人入院, 填充医院相
应病床状态
        % 不同病手术安排的星期不同, 利用延迟矩阵 OperationDelayTime, 修
正住院时间
        bedState(k,3) = bedState(k,3) + OperationDelayTime( waitQueue(row,1) ,
            weekday( x2mdate( day+waitQueue(row,5) ) ) );
        % 中间略去若干统计量更新
        waitQueue(row,1) = 0 ; % 设置移除标记
    end
end
% 在等待队列中移除已经安排入院的病人
[ row ignore ] = find( waitQueue(:,1)~=0 ) ; waitQueue = waitQueue( row , : ) ;

```

### 1.6.3 更新等待队列函数模块 updateWaitQueue( waitQueue , day )

```
temp = getOutPatient ; % 得到今日门诊的病人信息
```

```
% 中间略去若干处理，将今日门诊病人加入等待病人的队列
waitQueue = push_back( waitQueue , temp ) ;
```

## 2. 四种医院安排病床的规则函数

表 24: 四种医院安排病床的规则函数

程序名称	功能
FCFS_original.m	医院初始的安排病床规则，先来先服务(FCFS)。
P2_Rule_global.m	第 2 间的安排病床规则，按各类病的优先级矩阵方式分配入住。
P4_Rule_global.m	第 4 间的安排病床规则，更新了各类病手术安排优先级矩阵。
P5_Rule_global.m	第 5 间的安排病床规则，按各类病的病床比例分配入住。

### 2.1 函数接口说明：

输入参数：3 个，医院的病床状态，等待病人队列，当天的日期（星期）  
输出参数：1 个，安排入院的病人编号

### 2.2 以 P2\_Rule\_global.m 为例：

```
function ret = P2_Rule_global( bedState , waitQueue , day )
Priority = [ 5 5 5 5 5 5 5
             4 4 4 2 1 2 3
             3 1 1 1 2 3 4
             2 3 3 4 3 4 1
             1 2 2 3 4 1 2
           ] ; % 安排病床规则的优先级矩阵
emptySum = sum( bedState(:,1)==0 ) ;%求取当前空的床位数
cur_day = weekday( x2mdate( day ) ) ;%得到当天的星期号
cur_pri = Priority(:, cur_day ) ;%得到当天的优先级列
[y i] = sort(cur_pri) ; i = flipud(i) ;%将优先级从大到小排序后的下标
k = 1 ; ret = [] ;
%当有剩余床位，有等待病人，且并非 5 个优先级的病人都空的时候
%执行病人入住策略
while emptySum > 0 & ~isempty(waitQueue) & k <= 5
    index = find(waitQueue(:,1) == i(k)) ;%得到 k 优先级的病人下标
    if length(index) >= emptySum %床位用完，退出
        ret = [ret ; waitQueue(index(1:emptySum),4)] ; break ;
    else
        %更新应入住病人列表和剩余床位数
        ret = [ret ; waitQueue(index,4)] ; emptySum = emptySum - length(index) ;
    end
    k = k + 1 ; %考察下一个优先级
end
```

## 3. SimuHospital\_P3.m

功能：第 3 间的告知门诊病人大致入住时间程序。

```
function WaitTime = SimuHospital_P3( RuleFunction , InitialState , Today , DayLimit ,
ThePatient , CountLimit )
```

输入参数: 6 个, 医院病床安排规则函数句柄, 医院初始化状态函数句柄, 门诊的日期 (excel 格式), 模拟时间的限制, 待告知入住时间的病人 (得病的类别), 限制的模拟次数。

输出参数: 1 个, 该病人入院需要等待的天数。

#### 4. set\_911\_state.m

功能: 设置 2008 年 9 月 11 日的医院病床状态和等待病人队列的初始化函数。

```
function [ bedState , waitQueue , WaitPatientNo ] = set_911_state( bedState , BedsNum ,
WaitPatientNo )
```

输入参数: 3 个, 医院的病床状态 (空矩阵), 医院的病床数目, 等待队列内病人的编号 (初始传入 1)。

输出参数: 3 个, 设置后的医院病床状态, 等待的病人队列, 等待队列内病人的编号 (更新值)。

### 附件 3 其它部分程序清单和简要说明

表 25: 其它部分程序清单

程序名称	功能	输入参数	输出参数
getOutPatient.m	生成病人流	无	门诊病人信息
displayMessage.m	在 matlab 中展示原始数据	数据矩阵	原始数据信息

## 论文范例 2：2014 年校内赛优秀论文

### 2014 电子科技大学大学生数学建模竞赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们的题目是： 存在渗流段的管道压力分布计算建模

我们参赛年级是（一年级，二年级以上）： 二年级以上

所属学院（请填写完整的全名，可填多个）： 微电子与固体电子学院  
计算机科学与工程学院

经济与管理学院

参赛队员（打印并签名）： 1. 施家图

2. 郭仲勋

3. 王婷

指导教师或指导教师组负责人（有的话打印）： 张勇

是否愿意参加 2012 年国内赛（是，否）： 是

日期： 2014 年 6 月 8 日

---

报名队号（请查阅《2016 校内赛报名队信息-0520》后填写）：

# 2014 电子科技大学大学生数学建模竞赛

## 编 号 专 用 页

评阅编号（由组委会评阅前进行编号）：

评阅记录：

评 阅 人				
评 分				
备 注				

# 存在渗流段的管道压力分布计算建模

## 摘要

本文对存在沙子渗流段的管道物理模型进行了研究，主要运用类比法、机理分析法、量纲分析法、数值分析法进行存在渗流段的管道压力分布模型的计算。

我们将建立五个数学物理模型，模型一：稳定状态线性渗流模型；模型二：稳定状态非线性渗流模型；模型三：非稳定状态线性渗流模型；模型四：非稳定状态非线性渗流修正模型；模型五：无沙段管道压力损失模型。

由于管道两侧流速关系未知，我们将管道的渗流状态分为稳态和非稳态两种情况。

在稳定状态下，沙子段两侧的流速是相同的，当流体流速较大时，渗流流速与压力梯度的关系符合线性的 Darcy's Law。当流体流速较小时，渗流流速与压力梯度满足 Darcy's Law 的非线性关系。通过机理分析我们得到了模型一和模型二。

在非稳定状态下，当管道两侧流速不相等时，管道内的孔隙度和渗透率都会随时间变化，渗流速度处于非稳定状态，此时需要分为两种情况：第一种情况是，水在渗透沙子的过程中，另一端还没有产生流量，此时沙子两端的压力梯度是最大的，渗流速度最快，Darcy's Law 为线性；这种情况下我们通过类比热传导过程建立的了模型三。第二种情况是，沙子的另一端已经产生流量，但两侧的流量并没有平衡，这种情况下沙子内的压力梯度会逐渐减小，渗流流速也会逐渐减小，Darcy's Law 可能会从线性变为非线性，在这种情况下我们修正了第三种模型，建立了模型四。

对于问题一，我们分别通过模型一和模型二直接得到了渗透率的表达式。

对于问题二，我们通过解析法求解模型一和模型二得到了稳定状态下沙子段的压力分布；其次，我们通过有限差分法对偏微分方程进行数值求解模型三，得到了在非稳定状态下的沙子段压力分布的动态变化情况。

对于问题三，我们利用量纲分析法单独建立了模型五求出了无沙段的压力分布，再根据问题二的求解结果得到了全段管道的压力分布。

**关键词：**类比法 机理分析法 偏微分方程数值解 量纲分析法

## 一、问题重述

渗流是流体通过多孔介质的流动。多孔介质是指由固体骨架和相互连通的孔隙、裂缝或各种类型毛细管所组成的材料。渗流现象普遍存在于自然界和人造材料中。如石油、天然气和煤层气的渗流；动物体内的血液微循环和微细支气管的渗流；植物体内水分、气体和糖分的输送等。

物理模型：

已知：管道两端压力和两端流量，其中沙子段的长度都是知道的，系统为均质模型，其中渗透率和孔隙度都是相同的。通过的流体为水或者油（力学专业的学生可考虑非牛顿性质的油）。



图 1 存在砂子渗流段的管道物理模型

求解内容：

1. 根据管道的两端压力、流量和孔隙度，确定管道中的沙子段渗流参数（渗透率  $K$ ）关系表达式（渗透率与流量和孔隙度等的关系）；
2. 已知管道里的物性参数，确定管道中的沙子段压力分布的数学模型（压力与长度的函数关系式）；
3. 建立管道中的压力分布的数学模型。

## 二、问题分析

本题目主要探究存在渗流段的管道压力分布计算模型，在已知管道压力和两端流量和沙子段长度的情况下，假设系统为均质模型，并且渗透率和孔隙度相同，建立管道中压力分布模型。

### 2.1 问题一的分析

对于问题 1，通过分析题目给出沙子渗流段的管道物理模型，我们根据管道两侧的流速关系将分别建立稳定状态下线性和非线性的模型，来确定管道中的沙子段渗流参数（渗透率  $K$ ）关系表达式。

在稳定状态中，即，当流体流量较大时，沙子不可压缩，即孔隙度不会随时间变化，由修正的 Darcy's Law，渗流量与压力梯度满足线性关系。根据上述线性关系和含沙段质量守恒可以得到沙子中的压力分布方程，进一步分析得出渗透率的表达式；当流体流量较小时，渗流量与压力梯度满足修正 Darcy's Law 非线性关系，同理得到此时的渗透率表达式。

在非稳定状态中，渗透率是压力梯度的函数，因此渗透率的关系十分复杂，我们将在模型扩展里进一步讨论。

### 2.2 问题二的分析

确定管道中沙子段压力分布的数学模型时，由于题目没有给出水段的管道长度，并且含沙段压强损失远远大于水段的压强损失，因此水段的压强损失可近似

忽略。在这一近似下，我们将两端沙子拼到一起，沙子边界的压力值用题目给的近似，然后求解含沙段的压力分布函数。

由于题目中的相对大小未知，由修正的 Darcy's Law，我们发现，在流体流速较小时，压力梯度呈非线性变化；而流体流速较大时，压力梯度呈线性变化。

当系统处于稳态，流体流速较大，流体流速和压力梯度成线性变化，并且此时，由于沙子不可压缩，孔隙度和渗透率都不随时间变化；而流体流速较小时，流体流速和压力梯度成非线性变化。上述两种情况都可以用稳态时的机理分析列出压力的分布方程，从而求解。

当系统处于非稳态时，当时，管道的渗流处于非稳定状态，即、会逐渐向稳态变化，此时要分为两种情况：

第一种情况是，在这种情况下水在渗透沙子，另一端还没有产生流量，此时沙子两端的压力梯度是最大的，因此沙子内水的渗透速度最快，Darcy's Law 为线性，这种情况下我们通过类比热传导过程建立非稳定状态线性渗流模型。

第二种情况是，但，这种情况下沙子内的压力梯度逐渐减小，渗透速率逐渐减小，Darcy's Law 可能从线性变为非线性，这种情况下我们对第一种情况的模型进行修正，建立相应的修正模型。最后通过对模型的求解得到沙子段压力分布情况。

具体的建模思路如图 2-1 所示

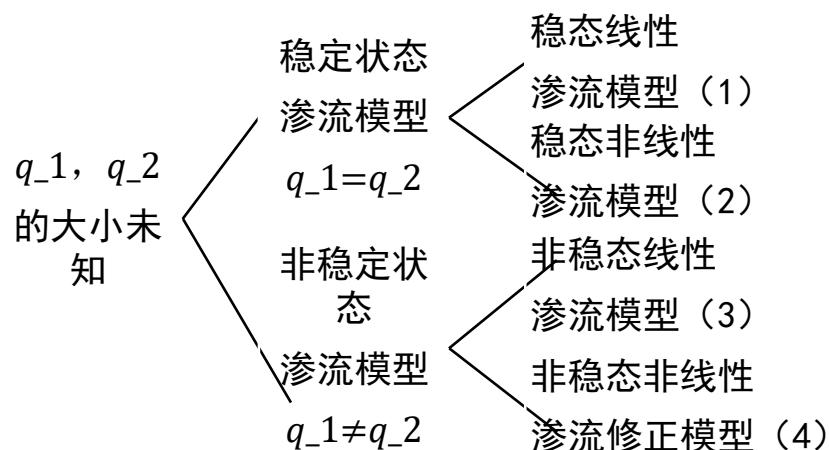


图 2-1

注：模型中的线性是指在修正 Darcy's Law 中压力梯度大于时，流体流量与压力梯度呈线性关系。

上图中的模型 (4) 为模型 (3) 的修正模型。

### 2.3 问题三的分析

在问题二中，我们抓住主要矛盾忽略了水在无沙段管道的压力损失，而问题三需要求解整个管道中的压力分布，因此无沙段的压力差需要被重新考虑。

虽然压力差的关系式难以推导，但我们可以知道压力差与哪些物理量有关，我们决定采用量纲分析法，得出无沙段压力损失与其他物理量的函数关系，从而

得出无沙段的压力分布。

### 三、模型假设

1. 假设温度保持为室温 20℃。
2. 假设管道中的流体为水。
3. 假设管道为圆形管道，有较小的摩擦系数。
4. 假设稳定状态下水和沙子都具有不可压缩性，在非稳定状态时具有可压缩性。
5. 假设沙子位置固定，并且沙子压缩导致的其含沙段长度变化忽略不计。
6. 假设管道中水段与含沙段之比较小，即管道中含沙段压强损失远远大于水段压强损失，则水段的压强损失可近似忽略。
7. 假设系统为均质模型，其中渗透率和孔隙度都是相同的，即每个截面的孔隙与沙子之比为常数。
8. 假设题目给定模型中管道中两段含沙段长度分别为。
9. 假设管道中的水能渗流通过沙子。
10. 假设水在管道中都是均匀流动的，即不考虑水的涡流等其他因素。

### 四、定义与符号说明

符号	意义	单位
	流体流动方向的距离	
	水的密度	
	管道截面面积	
	非稳定状态下的孔隙度	
	稳定状态下的孔隙度	
	初始孔隙度	
	压力	
	管道物理模型中初始压力	
	管道物理模型中末端压力	
	管道物理模型中初始流量	
	管道物理模型中末端流量	
	渗流速度	
	非线性状态下多孔介质渗透率	
	线性状态下多孔介质渗透率	
	流体粘度	
	孔隙压缩系数	
	初始压力	
	临界压力梯度	

拟启动压力梯度  
 启动压力梯度  
 管道模型中第一段含沙段的长度  
 管道模型中第一段含沙段的长度  
 稳定状态下管道模型中的流速  
 非稳定状态下管道模型中第一段的流速  
 非稳定状态下管道模型中第二段的流速  
 非稳定状态下管道模型中第三段的流速  
 非稳定状态下管道模型中第四段的流速  
 非稳定状态下管道模型中第五段的流速

注：为了保证变量的统一，我们将题目给出的变量进行一定的替换。即将五段渗流模型中压力的变量替换为。

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一模型

由于题目中沙子渗流段的管道物理模型中的大小未知，我们将其分为稳定状态和非稳定状态分别建立模型。

#### 5.1.1 建立稳定状态线性渗流模型

在稳定状态时，沙子的孔隙度不会随时间变化，全管道的流速趋于稳定，此时。由所给的参考文献可知，当沙子内的压力梯度大于临界压力梯度时，管道中的流速较大，水在沙子中的渗流速度与压力梯度满足修正后的 Darcy's Law 的线性部分。

我们在管道中沙子段取一段微元，设第一段沙子的左端点为坐标原点，流速稳定情况下压力和流速都只是坐标的一元函数，如图 5-1 所示

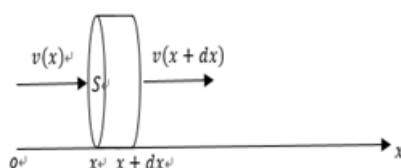


图 5-1

由假设可知水不可压缩，由于孔隙度不变，微元内不会有质量累积，因此有

(1-1)

其中分别为微元两侧的截面孔隙度，因为沙子是均质的并且根据假设可知

(1-2)

所以有

(1-3)

两边同时除以并取极限得

(1-4)

(1-5)

此时也验证了流速是恒定的结论，再根据文献给出修正的线性 Darcy's Law，水平流动的渗流速度与压力梯度关系为线性，表达式为

(1-6)

将等式(1-6)带入(1-5)可得

(1-7)

由此可知沙子中的压力满足一维 Laplace 方程，由假设 6 可知第一段沙子和第二段沙子之间的压力损失可以近似忽略，因此我们可以将两段沙子拼接成一段，总长度为，由此可以确定边界条件，即

(1-8)

至此稳定状态线性渗流模型建立完毕

### 5. 1. 2 利用稳定状态线性渗流模型求解的表达式

对(1-7)两边积分并代入边界条件可知

(1-9)

将(1-9)代入修正的线性 Darcy's Law 可得

(1-10)

由于流量稳定可以推出沙子两端的流速与沙子内部流速的关系

(1-11)

为稳定时沙子的孔隙度，将(1-11)代入(1-10)得

(1-12)

由此得出的表达式

(1-13)

### 5. 1. 3 建立稳定状态非线性渗流模型

在稳定状态时，当沙子内的压力梯度小于临界压力梯度时，管道中的流速较小，水在沙子中的渗流速度与压力关系曲线落入修正 Darcy's Law 的非线性部分。建模的过程与 1.1 相同，在此就不再赘述。

根据修正 Darcy's Law 的非线性部分

(1-14)

其中

(1-15)

将式(1-13)两边对求导可得

(1-16)

将的关系式(1-14)代入式(1-15)得

(1-17)

化简后可得

(1-18)

由式(1-17)可以看出, 两个乘积项至少有一个等于 0, 因此可以得出

(1-19)

因为是启动压力梯度, 有假设 9 可知, 压力梯度必然大于启动压力梯度, 因此第一项不等于 0, 即:

(1-20)

由此可以看出两个模型的结果都是一致的, 即无论 Darcy's Law 是否是线性的, 在稳定状态下, 压力在沙子里的分布始终是线性的,

#### 5. 1. 4 利用稳定状态非线性渗流模型求解的表达式

对(1-18)两边积分, 根据边界条件可得:

(1-21)

根据修正后的非线性 Darcy's Law

(1-22)

(1-23)

将(1-20)和(1-11)代入上式得

(1-24)

### 5. 2 问题二的模型

#### 5. 2. 1 稳定状态模型

问题 2 的稳定状态模型与问题 1 的模型相同。其求解过程如下:

由问题 1 的模型可得:

其边界条件为:

两边积分并代入边界条件可得到:

所以沙子段在稳态中的压力分布为:

则此时压力分布为线性分布。

#### 5. 2. 2 非稳定状态模型

当时, 管道的渗流处于非稳定状态, 即、会逐渐向稳态变化, 此时要分为两种情况: (用偏微分方程的数值解进行求解)

第一种情况是, 在这种情况下水在渗透沙子, 另一端还没有产生流量, 此时沙子两端的压力梯度是最大的, 因此沙子内水的渗透速度最快, Darcy's Law 为线性, 这种情况下我们建立的是非稳定状态线性渗流模型。

第二种情况是, 但, 这种情况下沙子内的压力梯度逐渐减小, 渗透速率逐渐减小, Darcy's Law 从线性变为非线性, 这种情况下我们建立的是非稳定状态非

线性渗流模型。

· 建立非稳定状态非线性渗流模型

要考虑沙子和水的压缩，所以沙子的密度、孔隙度、渗透率和水的密度都是压强的函数，记为 $\rho$ ， $n$ ， $k$ ， $\gamma$ 。

· 建模准备：和的推导

的推导：

不妨假设水的体积为，初始值为。

在等温条件下压缩系数的定义：

(2-1)

写成微分形式：

(2-2)

流体质量：

(2-3)

等式两边取全微分有：

(2-4)

整理得：

(2-5)

将(2-2)式代入(2-5)可得：

(2-6)

分离变量积分：

(2-7)

由于变化非常微小，可视为常数，因此易得：

(2-8)

按麦克劳林级数展开，取前两项有：

(2-9)

其中为水在常温下的压缩系数。

的推导：

不妨假设水的体积为，初始值为，由孔隙度的定义可得：

(2-10)

两边微分得：

(2-11)

由压缩系数的定义得：

(2-12)

其中为沙子的压缩系数

将上式带入(2-11)可得

(2-13)

即：

(2-14)

两边积分可得:

(2-15)

其中为沙子在常温下的压缩系数, 为初始孔隙度。

### · 模型建立

在非稳定线性的状态下, Darcy's Law 的压力和流速的关系和 Fourier 冷却定律中温度和热流的关系类似, 所以我们联想到用热流和温度类比流量、压力, 用建立热传导方程的方法建立渗流状态方程。

流量和压力都是时间和坐标的二元函数, 记作 $v$ 。取一段 $\omega$ 的微元, 由于沙子孔隙度的变化和水的压缩, 流入和流出的流量不相等, 微元内的质量会随时间变化。示意图如下所示:

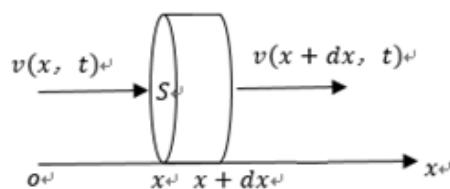


图 5-2

在的时间微元内, 流入质量和流出质量以及增加的质量分别为:

(2-14)

由质量守恒, 流入质量 - 流出质量=增加的质量, 得到:

(2-15)

方程左边由于在微元内的变化率远不及流速变化, 因此将看成不变的常数, 设为初始密度, 但是方程右边孔隙度和水的密度的变化率基本在同一个数量级, 所以不能忽略。

在方程左边除以构造流量的偏导数:

(2-16)

经过化简, 得出:

(2-17)

其中

(2-18)

化简可得:

(2-19)

由于水和沙子都很难压缩, 都很小, 所以忽略第三项得:

(2-19)

根据修正线性 Darcy's Law, 水平流动的渗流速度与压力梯度关系为线性,

表达式为

(2-20)

将(2-19)和(2-20)带入(2-17)中得:

(2-21)

化简可得:

(2-22)

(2-23)

可以看出(2-21)是一个一维的抛物线偏微分方程, 形式上和热传导方程是一致的, 至此非稳定状态线性渗流模型建立完毕。

#### · 模型求解

根据 Crank-Nicolson 公式 (附录 1), 可以将如下方程的求解区域划分为网格, 再利用有限差分法进行数值求解。

(2-24)

其中为初始条件, 为边界条件。

关于边界条件的讨论:

注意到: 沙石在有水渗透之前, 孔隙度可以视为 0, 即压强梯度, 而在完全导通之后。即一个负的常数。由此假设:

(2-25)

式中取决于管道物性参数

用递推法求得边界条件:

(2-26)

由附录 2 程序, 解得方程的近似解。当流通时间一定, 管道长度不大于 0.5 时, 压强梯度渐趋于线性, 如图 5-3 所示。取管道长度为 0.5m, 如图 5-4 所示, 随着时间的推移, 压强逐渐呈线性递减的规律, 这也与我们稳定状态模型求解结果一致。

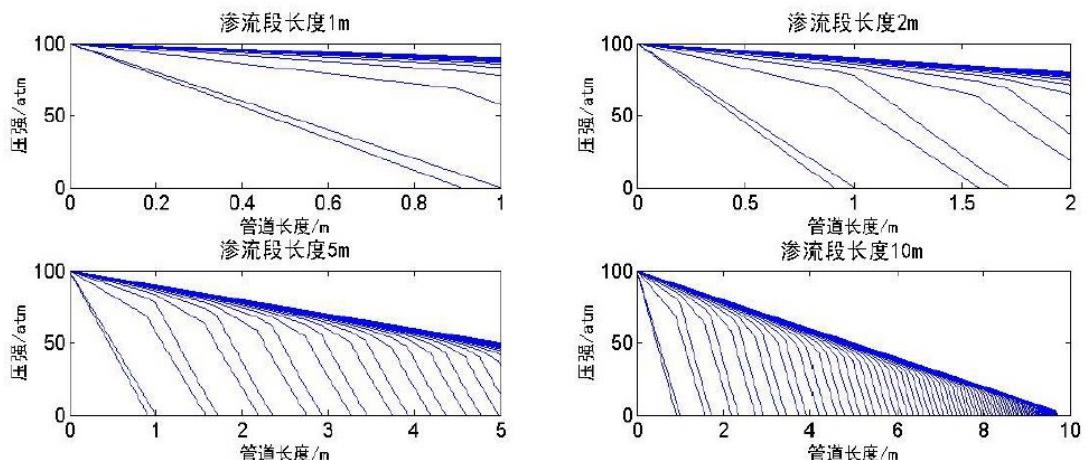


图 5-3

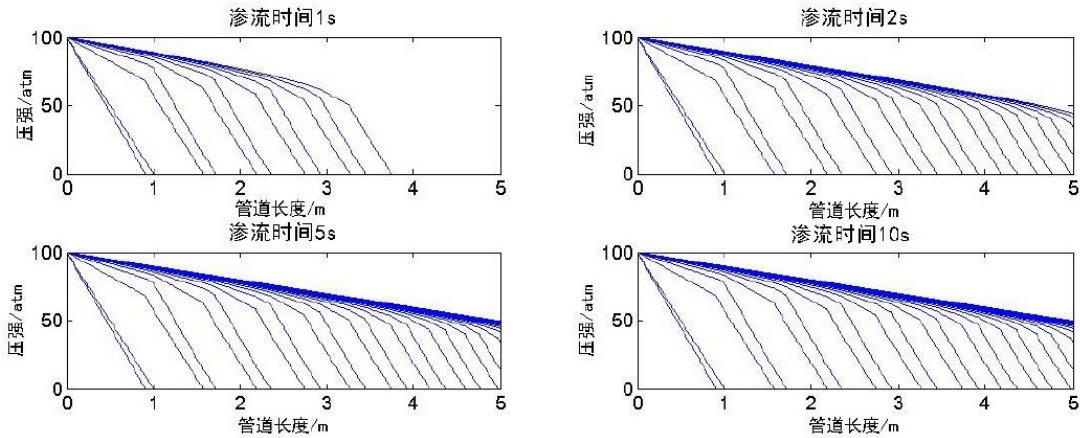


图 5-4

### 5.2.3 非稳定状态非线性渗流修正模型的建立

该模型与 1 中的模型建立过程基本一致, 只是 Darcy's Law 是非线性的, 即:

(2-27)

其中

(2-28)

将(2-24)(2-19)代入(2-17)中得:

(2-29)

(2-30)

至此问题二模型已建立完毕。

可以看出该模型是一个非线性抛物线方程, 求解超出了我们的能力范围。

### 5.3 问题三的模型

#### 5.3.1 管道压力损失模型

##### · 模型建立

在前两问中, 由于在管道内的压力损失远远小于沙子内的压力损失, 为了抓住主要矛盾, 我们将其忽略不计。但在本问中为了研究管道全段的压力分布, 因此我们必须求出没有沙子段的压力表达式。

由于没有沙子的管道中的压力损失表达式比较复杂, 但我们可以确定与其相关的物理量, 因此考虑采用量纲分析法。

首先我们需要找出与其相关的物理量, 通过查阅相关资料有压力降可写为关于如下物理量的函数:

(3-1)

变量列表及其量纲如表 3-1 所示

表 3-1

物理量	压力差	水的密度	粘度	管长	管径	管子的绝对粗糙程度	流速
量纲							

应用量纲分析法定理:

(3-2)

于是有:

(3-3)

由此解得:

(3-4)

故:

(3-5)

同理有:

(3-6)

显然对于物理量和有:

(3-7)

整理方程式有:

根据实验结论, 与成正比, 与管径成反比, 故可将变形化简有:

(3-8)

因此压力差为:

(3-9)

令得

(3-10)

即

(3-11)

其中为常数

至此, 第三问管道压力损失模型建立完毕。

### · 模型求解

(3-11)两边全微分可得:

(3-12)

由此可得在确定的时刻, 都是的线性函数。

由于非稳定的情况比较复杂, 这儿只讨论稳定的情况, 在稳定的情况下, 管道流速不会发生变化, 只是的函数, 代入题目条件可得:

(3-13)

(3-14)

一旦知道无沙段的长度，即可修正问题二的边界条件，从而得到整段管子的压力分布

## 六、模型的评价与推广

### 6. 1 模型的评价

优点：

- 1) 本文模型充分考虑了影响沙子渗流段压强与流量的各种因素，提出了沙子段渗透率与压强流量之间的的关系表达式。
- 2) 本文利用偏微分方程来描述流量随距离，时间的动态变化关系，并在模型三中类比热传导方程给出了一定误差范围内的数值近似解。
- 3) 对模型五的推导过程中，采用了量纲分析法，极大的减少了参数的可能组合，很快得出符合实际情况的结果。

缺点：

本文的前四个模型都是在一定近似的条件下推导出来的，与真实的情况有一定的误差，另外模型四涉及非线性偏微分方程求解，在我们的能力之外，所以模型四并没有得到求解。

### 6. 2 模型的推广

对于沙子段数很多且与水段交替出现的情况，文中所述的模型在一定精度范围内仍然适用。

## 七、参考文献

- [1] 徐全智. 杨晋浩. 数学建模. 第二版. 北京：高等教育出版社，2008， 81-114
- [2] 侯国祥.孙江龙.王先洲.冯大奎.工程流体力学. 第一版.北京：机械工业出版社，2006， 4-59
- [3] 彭芳麟.计算物理基础.第一版.北京：高等教育出版社，2010， 330-399
- [4] 李明奇.田太心.数学物理方法.第一版.四川：电子科技大学出版社，2006， 17-77
- [5] 翟云芳.渗流力学.第三版.北京：石油工业出版社，2010,7-89
- [6] 刘文超.姚军.孙致学.黄朝琴.基于渗透率连续变化的低渗透多孔介质非线性渗流模型.计算力学学报.第 29 卷.第 6 期.2012 年 12 月
- [7] 熊彬.阮百尧.MATLAB 在有限差分法中的应用.桂林工学院学报.第 21 卷.第 2 期.2001 年 4 月
- [8] 孙志忠. 偏微分方程数值解法.第二版.北京：科学出版社.2012

## 八、附件

附件 1 热传导方程有限差分解法的依据

如果热传导方程右边对空间的二阶导数取时刻的值进行计算, 则得到隐式差分公式

用足标表示得

引入算符, 记

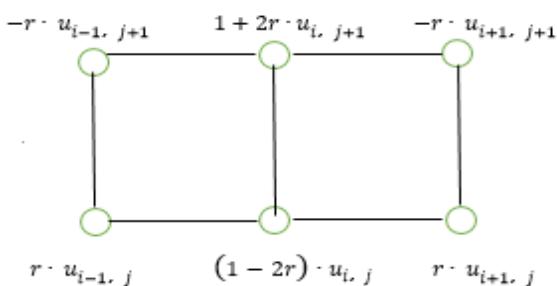
则得到隐式公式为

对显示公式也引入同样的算符, 则显示公式写成

将显式与隐式相加, 得平均公式

公式常写成下列形式

这个公式也叫 Crank-Nicolson 公式, 是六点对称的格式。热传导方程平均隐式公式中数据点间的关系



附件 2 方程 (2-24) 的求解

```
%rcd_ggg.m
function yy = rcd_ggg(pipe,t_ex)
clc;
pipest = 0.01;
pipen = pipe / pipest + 1;
xx = [0:pipest:pipe];
f = 100;
t_st = 0.1;
t_en = t_ex / t_st + 1;
```

```

t_t(1) = -100;
for k = 2 : t_en
    t_t(k) = -(1 / (0.1 * k - 0.1))^2 - 10;
end
p = zeros(t_en, pipen);
p(:,1) = f;
t_pipe = linspace(1,1,pipen);
for k = 1 : t_en
    %t_pipe = linspace(1,1,pipen);
    for kk = 2 : pipen
        %t_pipe(kk-1)
        temp = p(k,kk-1) + pipest * t_t(t_pipe(kk-1));
        if(temp < 0)
            p(k,kk) = 0;
        else
            p(k,kk) = temp;
            t_pipe(kk - 1) = t_pipe(kk - 1) + 1;
        end
    end
end
for i = 1 : t_en
    plot(xx,p(i,:))
    hold on
end

%rcd.m
figure
for i = 1 : 4
    subplot(2,2,i)
    if(i == 1)
        rcd_ggg(1,10.0)
    elseif(i == 2)
        rcd_ggg(2,10.0)
    elseif(i == 3)
        rcd_ggg(5,10.0)
    else
        rcd_ggg(10,10.0)
    end
end
figure
for i = 1 : 4
    subplot(2,2,i)

```

```
if(i == 1)
    rcd_ggg(5,1.0)
elseif(i == 2)
    rcd_ggg(5,2.0)
elseif(i == 3)
    rcd_ggg(5,5.0)
else
    rcd_ggg(5,10.0)
end
end
```

## 论文范例 3：2015 年校内赛优秀论文

### 承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们的题目是：成都空气质量的统计分析与评价

我们参赛年级是（一年级，二年级以上）：二年级以上

所属学院（请填写完整的全名）：通信与信息工程学院

---

---

参赛队员（打印并签名）：1. 黄家邦

2. 王云青

3. 王锋

指导教师或指导教师组负责人（有的话打印）：无

是否愿意参加国内赛（是，否）：是

日期：2015 年 6 月 1 日

---

报名队号（请查阅《2016 校内赛报名队信息-0520》后填写）：

## 2015 电子科技大学大学生数学建模竞赛

### 编 号 专 用 页

报名队号（请查阅《2016 校内赛报名队信息-0520》后填写）：

评阅记录：

评阅人				
评分				
备注				

# 成都空气质量的统计分析与评价

## 摘要

本文针对成都市近年来的各项气象指标和污染源指标，进行了深度分析，建立了成都市空气质量的评价指标，提出了影响空气质量的主要因素，并给相关部门提出了相应的建议措施。

为了建立空气质量的评价体系，我们提取出三个指标，每个月中度污染以上的天数（包括中度污染）、每个月中度污染以上连续的天数（统计连续天数在三天以上的）以及每个月平均的 AQI 值。进行因子分析，得出每个指标的权重值，最终汇总为一个值，进而反映出空气质量的优劣，通过曲线图得出 2013 年年末到 14 年初，成都空气质量较差，年中最好，但是到了年末和 2015 年初，空气又变差；此后空气质量逐渐变好，预计未来一年多空气质量会总体保持良好状态。

对于主要因素的分析，我们将其分为主要污染源因素和主要天气因素分析，经过 AQI 分析，主要污染源为 PM2.5 和 PM10；我们统计了七个气象指标，经检验，发现多元线性回归分析模型不适用此模型的分析，于是采用灰色关联度理论，得到平均相对湿度、温度、蒸发量是天气因素中的主要因素，并分析出了对空气质量的影响，最后通过各个指标与空气质量的综合得分的曲线图验证了结论的正确性。

通过分析主要污染源和主要天气因素，得到对空气质量影响最显著的因素，在现实生活中找到一些与之对应的实例，从生活中找“源头”加以抑制，以此为思路向相关部门提出建议措施。

**关键词：**空气质量；因子分析；灰色系统关联度；相关性分析

## 一、问题重述

成都作为一个特大型内陆城市，是四川乃至整个西部地区的经济火车头，经济带动作用特别明显。但成都地处四川盆地的西部，地理环境相对封闭，空气质量已成为与民攸关的亟待解决的问题。

我们从一些公开的数据网站中收集了一些关于成都地区的近几年的气象数据与空气质量数据，请你们建立模型，帮助某部门完成下列工作：

- (1) 建议你们更多地收集相关数据，并加以深入分析，建立合理的评价指标，对成都市近几年的空气质量的变化趋势做出合理的评价。
- (2) 请分析判断影响成都地区空气质量有哪些主要因素？这些因素是如何对空气质量造成影响？并想办法对你们的结论进行验证。
- (3) 请根据你们的分析结果，为政府相关部门提出不过度影响经济发展的同时，能充分改善地区空气质量的建议措施。

## 二、问题分析

**(1) 建立合理的评价指标，对成都市近几年的空气质量的变化趋势做出合理的评价**

### 1.1 收集与空气质量有关的数据，对原有数据进行扩展与分析。

通过上网查找资料和咨询相关工作人员，我们收集并整理了以下几项指标：

2011至2015年的日平均相对湿度、日平均降水量、日平均气压、日平均温度、日照时数、日平均地表气温、月平均蒸发量（除以当月的天数，得到日平均蒸发量）、我们还得到了每日2时，8时，14时，20时的风速与风向，以及当日的平均风速。见附件一

### 1.2 对数据的分析及建立合理的评价指标

我们将每个指标都以每个月为单位进行统计，得到每个月的日平均值，减少了原来的数据量，方便我们进行定量分析

在分析时我们发现 AQI 是一个十分重要的指标，AQI 又称为空气质量指数，是定量描述空气质量状况的无量纲指数。针对单项污染物的还规定了空气质量分指数 IAQI。参与空气质量评价的污染物为细颗粒物 (PM2.5)、可吸入颗粒物 (PM10)、二氧化硫、二氧化氮、臭氧、一氧化碳等六项。统计计算发现，PM2.5 作为首要污染物的频率较高，所以我们将国家空气质量分指数及对应的污染物项目浓度限值标准中的 PM2.5 改为美国标准，作为成都的标准。

AQI 可以很好地反映空气质量，所以我们围绕 AQI 建立我们的评价体系。根据算出的 AQI 的值将空气质量指数级别进行划分，分为优、良、轻度污染、中度污染、重度污染、严重污染六种等级。统计从 2013 年 12 月 2 日到 2015 年 5 月 20 日其间每个月中度污染以上的天数（包括中度污染）、每个月中度污染以上连续的天数（统计连续天数在三天以上的）以及每个月平均的 AQI 值，对这三个指标进行因子分析，得到各自的权重值，最后算出一个总数作为空气质量的综合得分，从而评价空气质量好坏的指标。

### 1.3 对成都近几年的变化趋势做出合理的评价

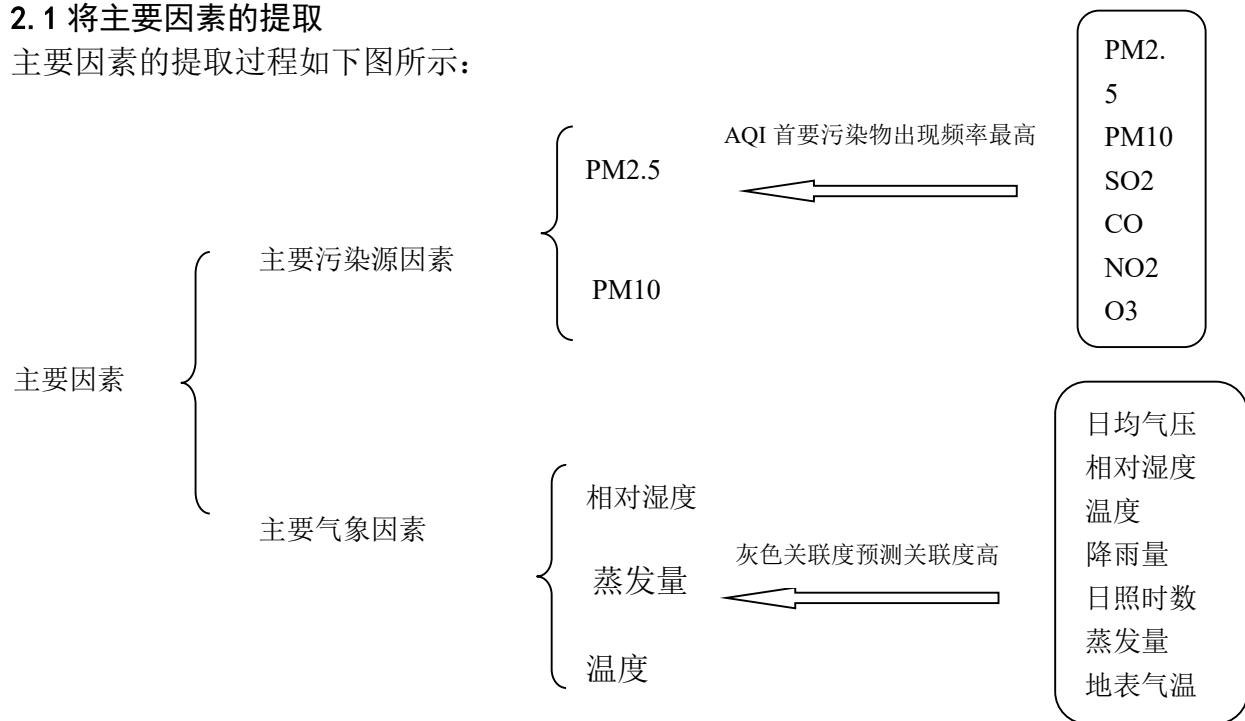
利用我们建立的评价指标，对成都近几年的空气质量量化，将其作为纵坐

标，月份作为横坐标，画出折线图，得出成都近几年空气质量的变化趋势。

**(2). 影响成都地区空气质量有哪些主要因素？这些因素是如何对空气质量造成影响？**

## 2.1 将主要因素的提取

主要因素的提取过程如下图所示：



## 2.2 分析日平均相对湿度、日平均降水量、日平均气压、日平均温度、日照时数、日平均地表气温、月平均蒸发量对空气质量评价体系中三个指标的影响

先使用多元回归分析的方法，分析这七个因素与三个指标之间的相关关系，发现两者间的相关性并不显著，因此判断此方法不可行。于是采用灰色关联度理论，通过计算这七个因素和这三个指标之间的关联度，以此来刻画它们对空气质量影响程度，从而确定哪些是影响空气质量的主要因素，以及对其造成了何种影响。

## 2.3 分析风向和风速对空气质量的影响

风向很难量化，所以要单独讨论风向和风速对空气质量的影响。我们引进污染系数这个变量，分析它与空气质量得分的相关关系，发现相关性不显著，所以采用灰色关联度分析污染系数与评价体系中三个指标的关系，从而判断它的影响程度。另外，我们采用玫瑰图来分析风向与空气质量等级的关系。

## 2.3 验证所得结论

以每个月中七个因素的平均值为函数值，月份为自变量，得出七个折线图，将分析得到的结果与七个图的变化趋势作对比，观察是否满足曲线的变化。同时，可将分析结果与已知的科学结果作比较，检验是否符合实际。

## (3) 根据分析结果，提出改善空气质量的建议

从影响成都市空气质量的主要因素出发，分析哪些人类活动可以影响这些因素，怎样影响这些因素，从而为成都市相关部门提出有效的建议。

### 三. 模型假设

1. 分析过程中忽略造成污染的因素的影响。
2. 每个月的某个指标的日平均量可以很好地反映该月的均值水平，没有异常值。
3. 计算污染系数时，下午两点的风速代表全天的风速水平。
4. 所有气象指标及污染物质指标都视为成都市区整体的指标。
5. 除了收集到的因素，不考虑其他因素对空气质量的影响。

### 四、符号说明

符号	说明
$s$	空气质量的综合得分
$AQI$	每个月平均的 AQI 值
$t$	日平均温度 (摄氏度)
$p$	日平均降水量 (0.1mm)
$r$	日照时数 (0.1 小时)
$dt$	日平均地表气温 (0.1°C)
$p_1$	每个月质量等级为中度污染以上连续的天数 (连续三天及以上的进行统计)
$p_2$	每月质量等级为中度污染以上天数占该月的比例
$h$	日平均相对湿度 (%)
$q$	日平均气压 (0.1hPa)
$e$	日平均蒸发量 (0.1mm)
$x_{ij}$	第 $i$ 个月的第 $j$ 个指标。 $i=1, 2, 3 \dots 18; j=1, 2, 3$
$x_{ij}$	标准化后的第 $i$ 个月的第 $j$ 个指标。 $i=1, 2, 3 \dots 18; j=1, 2, 3$
$\bar{x}_j$	$x_{ij}$ 的平均值。 $j=1, 2, 3$
$S_j$	$x_{ij}$ 的标准差。 $j=1, 2, 3$
$w$	污染系数
IAQIP	污染物项目 P 的质量浓度值；

CP	与 CP 相近的污染物浓度限值的高位值;
BPHi	与 CP 相近的污染物浓度限值的高位值;
BPLo	与 CP 相近的污染物浓度限值的低位值;
IAQIHi	与 BPHi 对应的空气质量分指数
IAQILo	与 BPLo 对应的空气质量分指数。

## 五. 模型建立与求解

(1) 建立合理的评价指标, 对成都市近几年的空气质量的变化趋势做出合理的评价

### 1.1 建立合理的评价指标

查阅国家制定的空气质量指数计算方法, 得到空气质量分指数 IAQI 的计算公式为:

$$IAQI_P = \frac{IAQI_{Hi} - IAQI_{Lo}}{BP_{Hi} - BP_{Lo}} (C_P - BP_{Lo}) + IAQI_{Lo} \quad (0)$$

再从各项污染物的 IAQI 中选择最大值确定为 AQI, 当 AQI 大于 50 时将 IAQI 最大的污染物确定为首要污染物; IAQI 大于 100 的污染物为超标污染物。

$$AQI = \max \{IAQI_1, IAQI_2, \dots, IAQI_n\} \quad (2)$$

其中, IAQI——空气质量分指数; n——污染物项目。

由公式(1)和(2)可以算出 2013 年 12 月 2 日至 2015 年 5 月 20 日的 AQI 值(见附件 2), 分析 AQI 的值后发现, 58.13% 的首要污染物是 PM2.5, 26.54% 的是 PM10, 因此, 我们将国家的空气质量分指数及对应的污染物项目浓度限值规定中的 PM2.5 加大了限制, 改用美国标准, 作为成都市的空气质量分指数及对应的污染物项目浓度限值标准, 如图:

空气 质量 分指数 IAQI	污染物项目浓度限值					
	PM2.5 24 小时平均/ ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	PM10 24 小时平均/ ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	二氧化硫 24 小时平均/ ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	一氧化碳 24 小时平均/ ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	二氧化氮 24 小时平均/ ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )	臭氧 24 小时平均/ ( $\mu\text{g}/\text{m}^3$ )
0	0	0	0	0	0	0
50	15	50	50	5	40	160
100	40	150	150	10	80	200
150	65	250	475	35	180	300
200	150	350	800	60	280	400
300	250	420	600	90	565	800
400	350	500	100	120	750	1000
500	500	600	620	150	940	1200

从而根据算出的 AQI 的值将空气质量指数级别进行重新划分（优、良、轻度污染、中度污染、重度污染、严重污染）。统计出  $p_1$  的值如下表：（2013 年 12 月至 2015 年 5 月）

月份	12	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_1$	0.96 67	0.9355	0.7857	0.5484	0.1667	0.5806	0.0000	0.0000	0.0000
月份	9	10	11	12	1	2	3	4	5
$p_1$	0.00 00	0.2903	0.0000	0.5484	0.8387	0.6429	0.4839	0.3333	0.0000

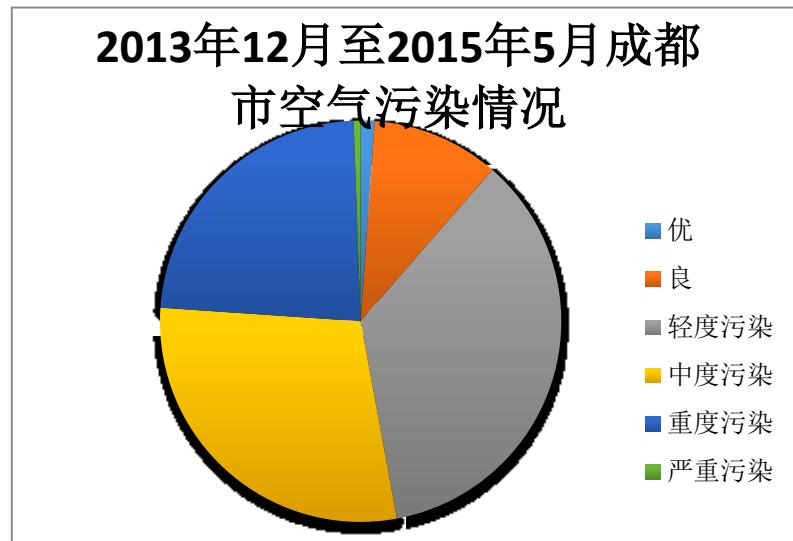
统计出  $p_2$  的值如下表：A

月份	12	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_2$	1.000 0	0.935 5	0.857 1	0.548 4	0.333 3	0.645 2	0.066 7	0.064 5	0.000 0
月份	9	10	11	12	1	2	3	4	5
$p_2$	0.100 0	0.354 8	0.233 3	0.677 4	0.838 7	0.678 6	0.483 9	0.366 7	0.300 0

统计出 AQI 的值如下表：

月份	12	1	2	3	4	5	6	7	8
$AQI$	196. 5682	237.2 118	174.7 622	149.2 748	129.8 651	146.7 628	103.3 792	98.94 55	95.81 29
月份	9	10	11	12	1	2	3	4	5
$AQI$	98.3 843	130.2 516	121.6 655	151.8 302	185.7 630	149.6 956	138.9 279	117.1 714	142.7 219

同时统计了这段时间各个质量等级所占的比率如下：



由此图可以得出，成都的中度和重度污染占了一半以上，直观上看可以用质量等级来反映空气质量的好坏，我们选取  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $AQI$  作为总指标的三个因素，下面采用因子分析法确定这三者的权重：

因子分析的主要目的就是用少数几个因子去描述几个变量间的关系。先将  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $AQI$  做无量纲化处理，用 SPSS 默认的标准化处理方法，即 z-score 标准化，公式如下：

$$x_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{S_j} \quad (3)$$

接下来用 SPSS 进行因子分析，得到以下输出结果

描述统计量

	N	极小值	极大值	均值	标准差
p1	18	.000000	.966667	.39561359	.353332999
AQI	18	95.812903	237.211765	142.72187964	37.541846402
p2	18	.000000	1.000000	.47133897	.318021121
有效的 N (列表状态)	18				

该表给出了三个量的基本信息。

相关矩阵

		Zscore (p1)	Zscore (AQI)	Zscore (p2)
相关	Zscore (p1)	1.000	.891	.974
	Zscore (AQI)	.891	1.000	.927
	Zscore (p2)	.974	.927	1.000
Sig. (单侧)	Zscore (p1)		.000	.000
	Zscore (AQI)	.000		.000
	Zscore (p2)	.000	.000	

多个变量间相关系数较大, 且sig都小于0.01, 说明各个变量间有显著性相关关系,

KMO 和 Bartlett 的检验

取样足够度的 Kaiser-Meyer-Olkin 度量。	.703
Bartlett 的球形度检验	75.016
df	3
Sig.	.000

KMO取值为0.703大于0.7, 且sig<0.01, 同样说明各变量间有显著的相关性。

综上, 这三个变量可以进行因子分析.

解释的总方差

成份	初始特征值			提取平方和载入		
	合计	方差的 %	累积 %	合计	方差的 %	累积 %
1	2.862	95.403	95.403	2.862	95.403	95.403
2	.117	3.887	99.290			
3	.021	.710	100.000			

提取平方和载入表示三个公因子各自的方差贡献值, 第一个因子可以解释总方差的95.403%, 即总体大约95%的信息可由该因子解释, 所以选择该因子即可代表这三个指标。

成份得分系数矩阵

	成份	
	1	
Zscore (p1)	.342	
Zscore (AQI)	.336	
Zscore (p2)	.346	

设该因子为F, 这有此表可知, F与  $p_1$ 、  $p_2$ 、  $AQI$  的关系为:

$$F = 0.342p_1 + 0.336AQI + 0.346p_2 \quad (4)$$

根据解释的总方差表中的第一个因子的方差贡献率, 得空气质量的综合得分

$$s = 0.95403F = 0.326p_1 + 0.321AQI + 0.330p_2 \quad (5)$$

由公式(5)可得 $s$ 在2013年12月至2015年5月的18个数值,如下:

月份	12	1	2	3	4	5	6	7	8
$s$	1.5359	1.7877	1.0342	0.2769	- 0.4644	0.3856	- 1.1213	- 1.1615	- 1.2552
月份	9	10	11	12	1	2	3	4	5
$s$	- 1.1294	- 0.3247	- 0.7920	0.4327	1.1580	0.5028	0.0620	- 0.3845	- 0.5428

根据 $s$ 的值,我们将其分为四个等级,运用SPSS进行聚类分析(聚类数为4)的结果如下:

阶	群集组合		系数	首次出现阶群集		下一阶	群集成员	
	群集 1	群集 2		群集 1	群集 2		案例	4 群集
	1	7	10	.000	0	0	2	1:1
2	7	8	.001	1	0	8	2:2	1
3	6	13	.002	0	0	6	3:3	1
4	11	17	.004	0	0	10	4:4	2
5	5	18	.007	0	0	10	5:5	3
6	6	15	.013	3	0	9	6:6	2
7	3	14	.020	0	0	14	7:7	4
8	7	9	.031	2	0	15	8:8	4
9	4	6	.051	0	6	12	9:9	4
10	5	11	.073	5	4	13	10:10	4
11	1	2	.105	0	0	14	11:11	3
12	4	16	.196	9	0	16	12:12	3
13	5	12	.301	10	0	15	13:13	2
14	1	3	.621	11	7	16	14:14	1
15	5	7	1.604	13	8	17	15:15	2
16	1	4	4.040	14	12	17	16:16	2
17	1	5	15.483	16	15	0	17:17	3
							18:18	3

- 因此分类结果为:
- (1) 2014年6、7、8、9月
  - (2) 2014年的4、10、11月以及2015年的4、5月
  - (3) 2014年的3、5、12月以及2015年的2、3月
  - (4) 2013年12月,2014年的1、2月和2015年的1月

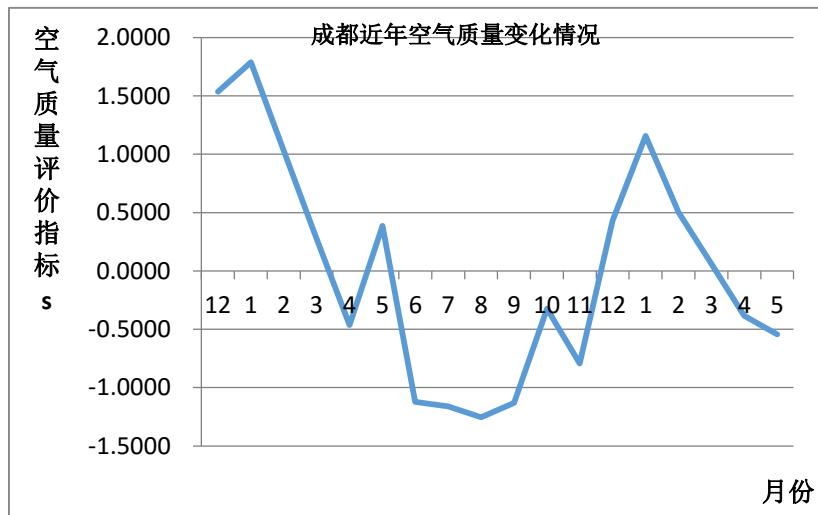
根据上述结果及对应的 $s$ 值,建立如下评价指标

空气质量等级	优	良	中	差
$s$	$s \leq -1$	$-1 < s \leq 0$	$0 < s \leq 1$	$s > 1$

由此评价指标可得,分类结果中(1)为优,(2)为良,(3)为中,(4)为差( $s$ 越大,空气质量越差)

## 1.2 对成都近几年的变化趋势做出合理的评价

利用已建立的评价指标 $s$ ,将近18个月的 $s$ 做一个曲线图,如下所示



由此可知，2013 年年末到 14 年 2 月，成都空气质量较差，3 月后空气质量总体在逐渐变好，7、8、9 月达到优，但是到了年末，空气质量由良转为中等，到了 2015 年初，空气又变差；从 2 月到五月，空气质量逐渐变好，预计未来一年多空气质量会保持良好状态。

(2) 分析影响成都地区空气质量的主要因素以及这些因素是如何对空气质量造成影响的？

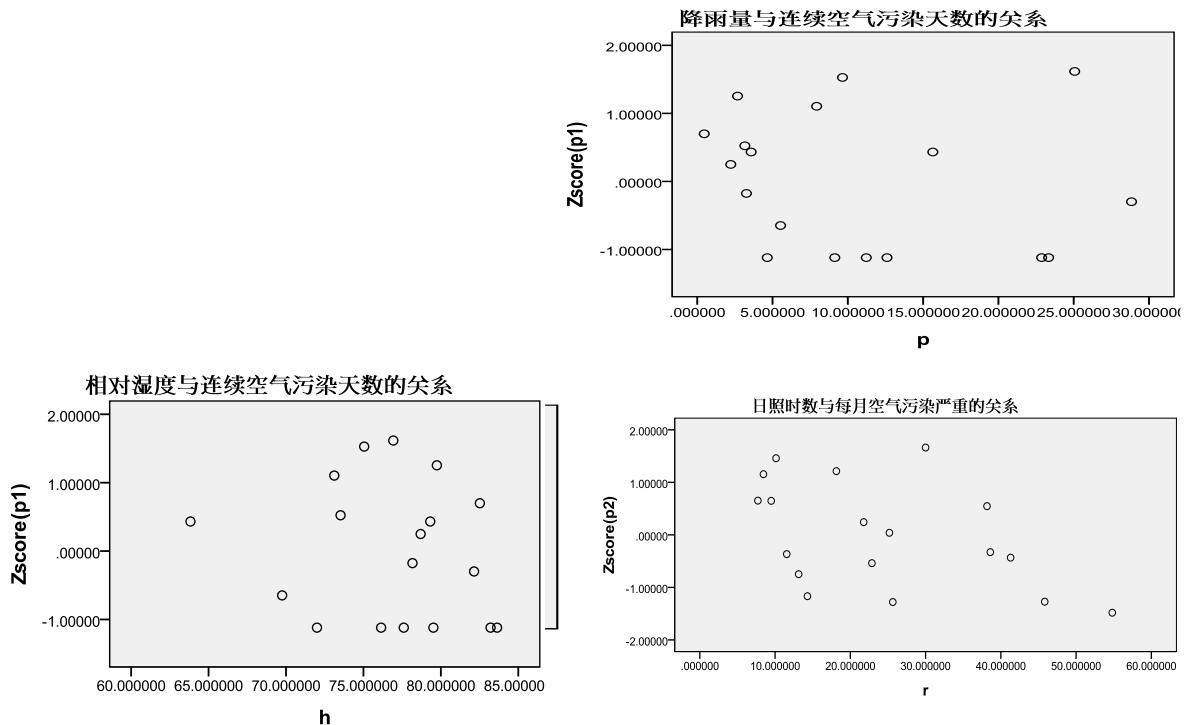
2.1 我们收集了七个因素进行分析，分别是日平均相对湿度、日平均降水量、日平均气压、日平均温度、日照时数、日平均地表气温、日平均蒸发量对空气质量评价体系中三个指标的影响。

下图纵向为月份，横向为指标

	日平均相对湿度	日平均降水量	日平均气压	日平均温度	日照时数	日平均地表气温	日平均蒸发量
12	76.9274	25.0645	9560	7.0968	30.0000	84.6452	11.6000
1	75.0484	9.6452	9611	7.4839	10.1290	42.4516	8.6129
2	73.1161	7.9286	9528	6.8036	18.1429	92.4643	10.9643
3	63.8306	15.6452	9575	12.3710	21.7742	113.9677	13.1935
4	69.7500	5.5333	9503	18.7167	41.3000	211.2000	19.7000
5	73.5242	3.1613	9465	21.4032	38.1613	225.0968	25.4194
6	76.1417	9.1333	9417	23.6333	45.8333	263.1000	24.2000
7	83.6290	22.8710	9415	26.3387	25.6452	265.1613	21.5484
8	77.6048	11.2258	9428	25.0968	54.8065	283.5161	29.4194
9	83.2083	12.6000	9489	22.5500	14.3000	226.7333	20.6333
10	82.1452	28.8387	9551	18.8226	11.5484	181.1613	15.1935
11	79.5167	23.3333	9548	12.3167	13.1333	154.3667	12.7333
12	79.3145	3.5806	9617	6.9839	9.4839	83.5484	10.7097
1	79.7419	2.6774	9581	7.1129	8.4516	64.2258	7.7097
2	82.5179	0.4643	9549	9.2143	7.7143	72.2414	12.1429
3	78.6935	2.2258	9527	14.3548	25.1935	136.8387	13.9355
4	78.1667	3.2667	9478	17.5500	38.6000	221.5667	24.9667
5	72.0000	4.6500	9462	18.5750	22.8667	232.1290	21.7000

## 2.2 选择分析方法

首先使用多元回归分析的方法，判断每个因素与空气质量的各个指标之间的相关关系是否显著。做出各因素关于空气质量的指标的散点图，其部分指标的散点图如下所示：



由以上几图可以看到各个因素和空气质量的各个指标的线性关系并不明显，再利用 spss 的多元统计功能对各因素与空气质量的各个指标进行相关分析，得到如下分析结果：

模型	非标准化系数		标准系数 试用版	t	Sig.	共线性统计量	
	B	标准 误差				容差	VIF
1 (常量)	844.654	905.754		.933	.373		
h	-.690	.458	-.246	-1.507	.163	.776	1.289
t	-.845	1.188	-.406	-.711	.493	.064	15.739
p	.225	.296	.140	.760	.465	.615	1.626
Q	-.083	.093	-.367	-.897	.391	.124	8.084
s	1.933	5.982	.129	.323	.753	.131	7.637
e	2.372	1.324	1.087	1.792	.103	.056	17.732
dt	-.027	.207	-.150	-.131	.898	.016	63.116

该表为回归系数表，通过t检验，发现所有显著性sig都大于0.05，所以各个变量之间的显著性不大，引入该线性模型无意义。

系数相关<sup>a</sup>

模型	dt	h	p	s	Q	t	e	
1 相关性	dt	1.000	.290	-.420	.701	.479	-.531	-.704
	h	.290	1.000	-.141	.329	.227	-.237	-.015
	p	-.420	-.141	1.000	-.273	-.266	-.073	.534
	s	.701	.329	-.273	1.000	.337	-.067	-.501
	Q	.479	.227	-.266	.337	1.000	-.031	-.060
	e	-.704	-.015	.534	-.501	-.060	.045	1.000
协方差	dt	.043	.028	-.026	.868	.009	-.131	-.193
	h	.028	.210	-.019	.902	.010	-.129	-.009
	p	-.026	-.019	.087	-.483	-.007	-.026	.209
	s	.868	.902	-.483	35.784	.187	-.474	-3.964
	Q	.009	.010	-.007	.187	.009	-.003	-.007
	t	-.131	-.129	-.026	-.474	-.003	1.411	.070
	e	-.193	-.009	.209	-3.964	-.007	.070	1.752

很多因素的相关系数的绝对值都比较小，基本都在0.6以下，可以认为自变量间的相关性都比较低。

共线性诊断 <sup>a</sup>										
模型	维数	特征值	条件索引	方差比例						
				(常量)	h	t	p	Q	s	e
1	1	6.405	1.000	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00
	2	1.153	2.357	.00	.00	.00	.00	.00	.10	.00
	3	.365	4.188	.00	.00	.00	.58	.00	.00	.00
	4	.056	10.652	.00	.01	.02	.07	.01	.39	.02
	5	.010	25.899	.00	.00	.58	.14	.00	.08	.24
	6	.008	28.686	.01	.02	.06	.09	.07	.04	.13
	7	.002	55.895	.14	.92	.11	.01	.16	.17	.01
	8	.001	87.686	.84	.04	.23	.12	.76	.21	.60

a. 因变量: r

高维度比如7、8维度的特征根约为零，多个维度的条件索引大于10，这些数据都说明变量间存在共线性，因此使用多元线性回归的方法来探究这七个因素与空气质量的各个指标的关系不可行。所以我们采用灰色理论的方法，计算这七个因素和空气质量指标之间的关联度，以此来刻画这七个因素对空气质量指标的影响程度，确定两者之间的联系。下面简单介绍一下灰色系统和关联分析：

对于部分信息已知而部分信息未知的系统，我们称之为灰色系统。灰色系统理论提出了一种新的分析方法—关联度分析方法，即根据因素之间发展态势的相似或相异程度来衡量因素间关联的程度，它揭示了事物动态关联的特征与程度。作为一个发展变化的系统，关联分析实际上是动态过程发展态势的量化比较分析。所谓发展态势比较，也就是系统各时期有关统计数据的几何关系的比较。

灰色系统理论的量化基础是生成数，从而突破了概率统计的局限性，使其结果不再是过去依据大量数据得到的经验性的统计规律，而是现实性的生成律。对于这个问题，我们利用累减法产生生成数，在这之前，我们对七个因素与空气质量的三个指标的相关性分析。

设  $x_i(k)$  为空气质量指标与七个因素第  $i$  个月的数值, 利用公式

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{18} kx_i(k) - \sum_{k=1}^{18} x_i(k) \sum_{k=1}^{18} \frac{k}{18} \quad i=1,2,\dots,18$$

对于  $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 18\}$ , 若  $\sigma_i$  的符号与  $\sigma_j$  的符号相同, 则  $x_i$  和  $x_j$  正相关, 若  $\sigma_i$  和  $\sigma_j$  的符号相反, 则  $x_i$  和  $x_j$  为负相关。

生成数的产生, 对于正相关的两个量  $x(k)$  和  $x(k-1)$ ,

$$x(k) = x(k) - x(k-1) \quad k=2,3,\dots,17$$

对于负相关的两个量  $x(k)$  和  $x(k-1)$ ,

$$x(k) = x(k-1) - x(k) \quad k=2,3,\dots,17$$

设空气质量指标为参考数列  $x_0(k)$ ,  $k=2,3,\dots,17$

七个因子的序列为比较数列  $x_i(k)$ ,  $k=2,3,\dots,17$ ,  $i=1,2,\dots,7$ 。则比较数列  $x_i(k)$  对参考数列  $x_0(k)$  在  $k$  时刻的关联系数为

$$\xi_i(k) = \frac{\min_s \min_t |x_0(t) - x_s(t)| + \rho \max_s \max_t |x_0(t) - x_s(t)|}{|x_0(k) - x_s(k)| + \rho \max_s \max_t |x_0(t) - x_s(t)|}$$

$\rho$  为分辨率且  $\rho \in (0,1)$ 。

称

$$r_i = \frac{1}{17} \sum_{k=1}^{17} \xi_i(k)$$

为数列  $x_i$  对参考数列  $x_0$  的关联度。

根据上述公式, 我们用 MATLAB 求解这七个因素和空气质量指标之间的关联度如下表:

$x_i \backslash x_0$	$p_1$	$AQI$	$p_2$
日平均气压(0.1hPa)	0.587431	0.625106	0.586127
平均相对湿度(%)	0.937992	0.638804	0.936486
温度℃	0.951095	0.671510	0.949138
降雨量(0.1mm)	0.888797	0.640007	0.887354
日照时数(0.1小时)	0.824647	0.538114	0.823520
蒸发量(0.1mm)	0.927426	0.663471	0.925756
平均地表气温(0.1℃)	0.610173	0.639020	0.609070

对上述方法进行检验, 将  $p_1$ ,  $AQI$ ,  $p_2$  与  $p_1$ ,  $AQI$ ,  $p_2$  进行关联度分析, 结果如下:

	$p_1$	$AQI$	$p_2$
$p_1$	1.000000	0.608827	0.997325

$AQI$	0.609065	1.000000	0.608971
$p_2$	0.997328	0.608971	1.000000

这三个指标每个指标与自身做关联度分析，从实际出发，结果应为 1，该表格对角线的结果恰恰为 1，说明用累减法产生生成数并进行关联度分析是合理的。

### 2.3 七个因素关联度的结果分析

分析关联度矩阵，可以得出以下结论：

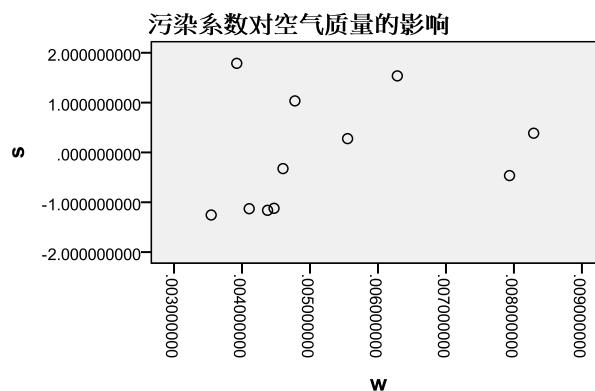
对于  $p_1$  指标，平均相对湿度、温度、蒸发量是主要影响因素；对于  $AQI$ ，所有因素的关联度都较小，但是相对而言，温度、蒸发量是主要因素；对于  $p_2$ ，平均相对湿度、温度、蒸发量是主要影响因素。

### 2.4 风向和风速对空气质量的影响

为了更好地描述风向和风速产生的影响，我们引入污染系数这个变量，污染系数，用来表示污染程度的大小，它的计算公式为风向频率除以平均风速。因为采集的数据量有限，只有 2013 年 12 月到 2014 年 10 月的数据量，为了保证数据的准确可靠，我们只提取这 11 个月的数据，算出污染系数如下：

月份	12	1	2	3	4	5
$w$	0.006284	0.003923	0.004778	0.005553	0.007935	0.008290
月份	6	7	8	9	10	
$w$	0.004471	0.004376	0.003547	0.004106	0.004603	

将污染系数与空气质量综合得分  $s$  做相关分析，SPSS 输出的结果为：



从散点图上的出初步结论，二者没有线性相关关系

相关系数

		s	w
Kendall 的 tau_b	s	相关系数	1.000
		Sig. ( 双侧 )	.382
		N	11
w		相关系数	.382
		Sig. ( 双侧 )	.102
		N	11

*s* 和 *w* 的相关系数很小, 且 sig 都大于 0.01, 二者之间的线性相关关系很不显著。

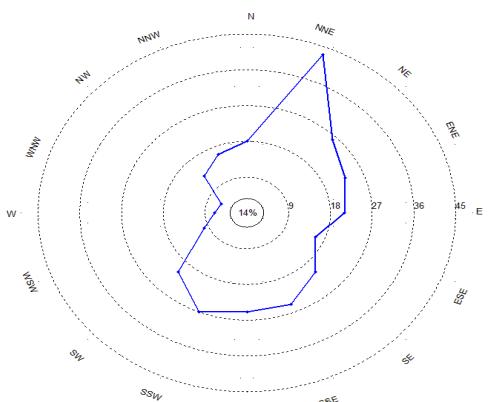
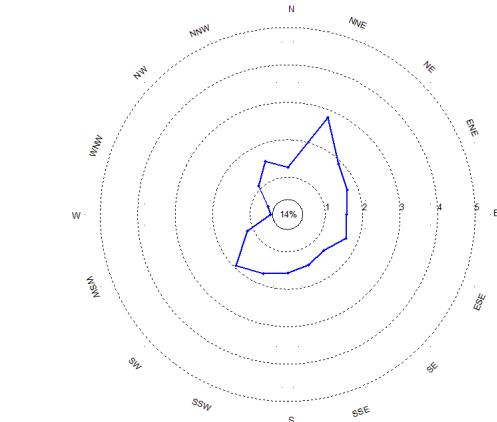
将 *s* 和 *w* 做关联度分析, 得到如下结果:

	<i>p</i> <sub>1</sub>	<i>AQI</i>	<i>p</i> <sub>2</sub>
<i>w</i>	0.678275	0.671672	0.660163

由此看出, 污染系数只对 *AQI* 的影响稍微大一些, 对其余两个指标的影响很小, 所以在成都地区, 风向和风速都不是影响空气质量的主要因素。

## 2.5 风向与污染系数的关系

风向与污染的关系, 主要表现在对污染物的水平输送上, 它可指示污染物的去向和行踪, 一般来说, 高值污染浓度常出现在大气污染源的下风方向。



首先我们选取近几年每天 14:00 的风向数据做了风向玫瑰图, 图像如上述左图所示:

据不同风向所占比例大小可以看出成都在近几年中, 主要风向为东北风偏东、东北风、西南风偏南、南风、东南风偏南, 这 5 种风向占总比重的 43.98%。经过数据的分析, 结合图像, 可以明显得到成都最近几年的主导风向即盛行风向是北风偏东, 和南风偏西。

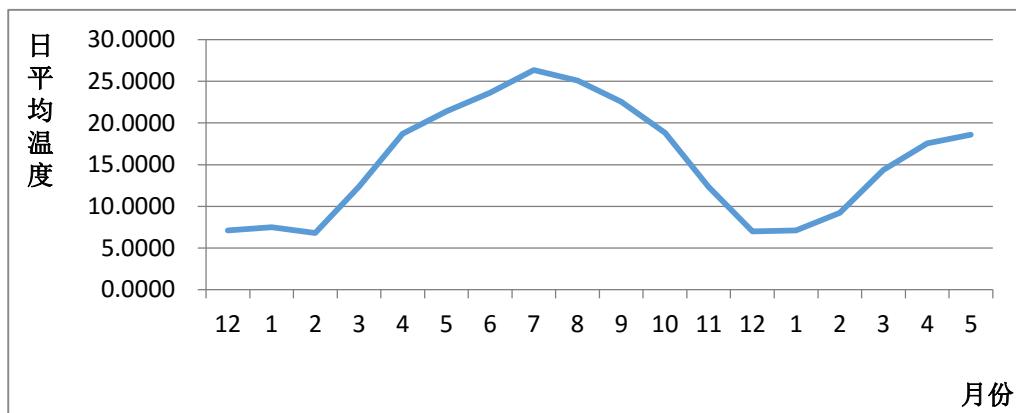
然而风向频率玫瑰图中未能反映风速大小对污染物的扩散作用, 风速大小和大气稀释扩散能力的大小存在直接的对应关系, 小风条件下明显不利于污染物的扩散, 而大风会加快污染物的扩散进程, 因此还要引入污染系数这个变量, 污染系数风向玫瑰图, 如右图所示

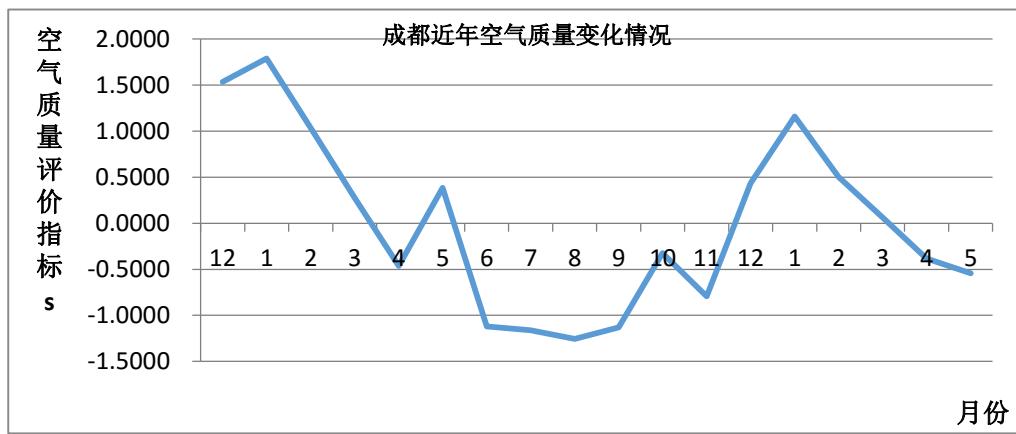
从图中可以看出, 在盛行风向上的污染系数也基本最大, 而且北风即附近风向明显大于南方, 结合风向玫瑰图得出的盛行风向, 得到以下结论: 成都全年基本盛行两个相对方向的风, 并且盛行风向变化基本在 90 度之内, 污染系数也基本符合这种变化趋势, 而且北风污染系数大于南风。在这种风型下, 对应盛行风的下风方向应该是污染物的聚集区域, 而盛行方向的上风方向应该是相对而言空气质量相对较好的区域。

## 2.6 主要天气因素如何影响空气质量

### 2.6.1 温度对空气质量的影响

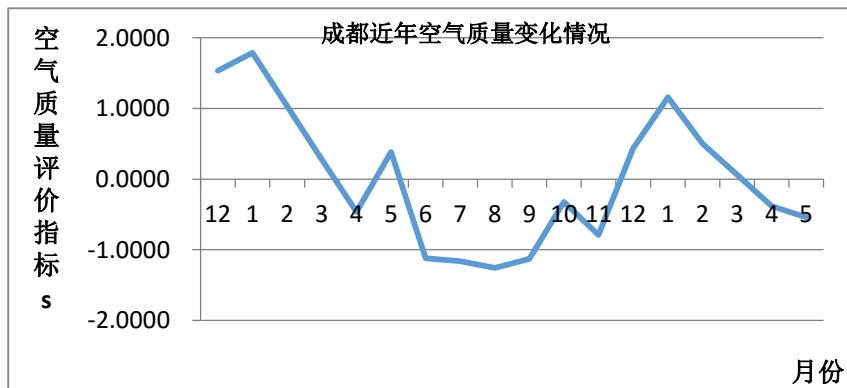
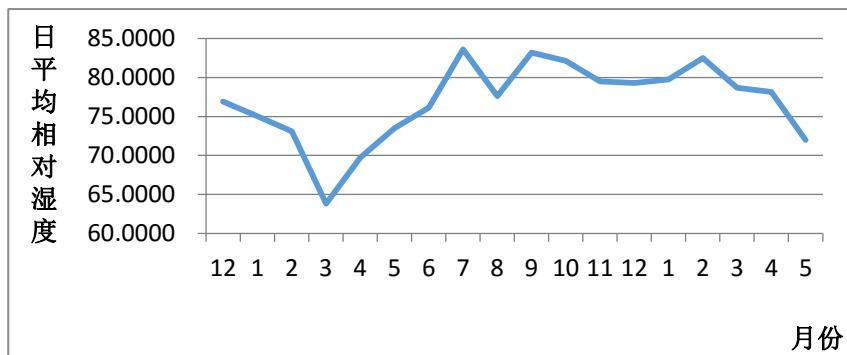
在一定范围内, 温度越高, 空气质量越好。逆温现象是指低空的温度低于高空的温度, 此时大气配置比较稳固, 空气流动缓慢, 空气不能向上扩散, 从而加重大气污染。一般来说, 冬季逆温层较强较厚, 维持时间较长; 夏季则相对偏弱。温度与  $s$  的折线图对比如下:





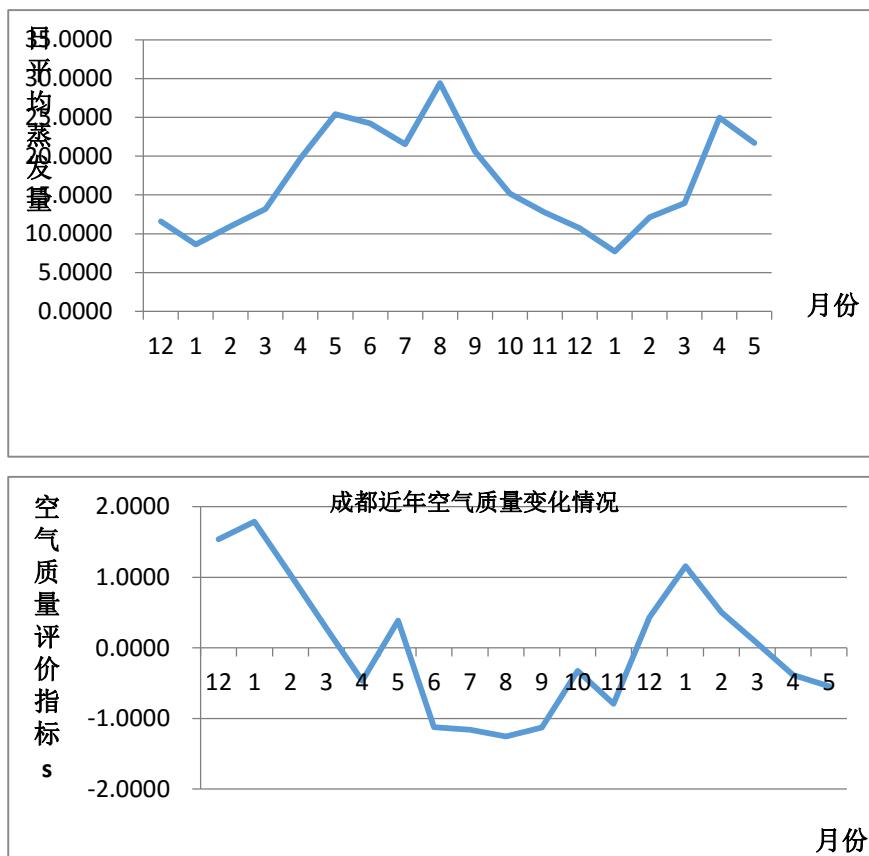
## 2. 6. 2 相对湿度对空气质量的影响

在一定范围内，相对湿度越低，空气质量越好。例如，当相对湿度增大时，可溶性固体溶入水中降低了水的蒸汽压，微小水滴因为曲率半径变小其蒸汽压又得到提高，形成了微小的溶液液滴与气体的动态平衡。这些微小液滴的粒径从纳米至微米级别，在这个级别上微观效应的化学反应更为突出，形成很多亚稳定的有毒物质。由于液滴的存在，形成了光的吸收、折射与散射现象，降低了空气的透明度。相对湿度与  $s$  的折线图对比如下：



## 2. 6. 3 蒸发量对空气质量的影响

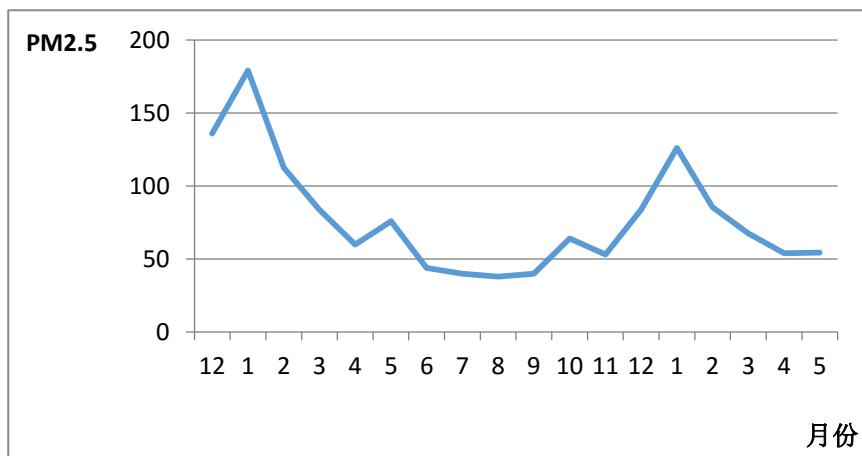
在一定范围内，蒸发量越高，空气质量越好。当空气中的相对湿度变小且温度上升时，蒸发量变大，根据空气质量与温度的关系，这时空气质量会变好。

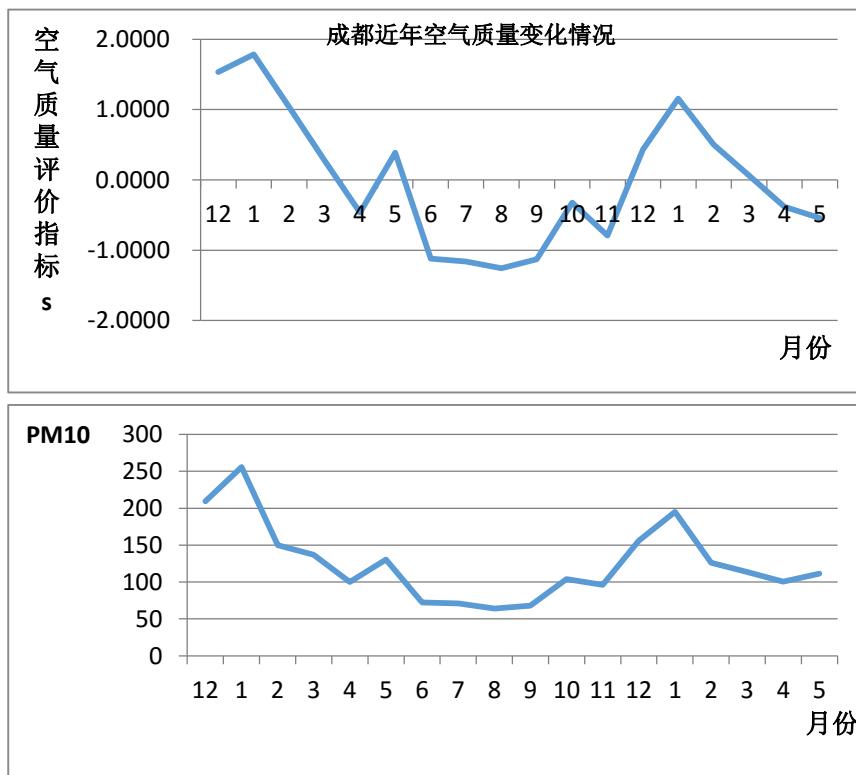


由曲线图趋势可知，温度越高，相对湿度越低，蒸发量越高，空气质量越好。很好地验证了我们的结论。

## 2.7 主要污染源因素如何影响空气质量

在计算 AQI 时发现，成都的污染物种以 PM2.5 和 PM10 为主，很显然，当 PM2.5 和 PM10 增多时，空气质量会变差，





由曲线图趋势可知，PM2.5 和 PM10 越高，空气质量越差，很好地验证了我们的结论。

### (3) 根据分析结果，提出改善空气质量的建议

#### 3.1 总述

结合我们第一部分对空气质量评价体系的建立和第二部分对主要因素的分析，我们从中找出对空气质量影响最显著的因素，并在现实生活中找到一些与之对应的实例，从生活中找“源头”加以抑制，从而改善这些显著因素的指标，产生对空气质量最有效的改观。我们以此入手，提出我们的建议。

#### 3.1 针对 PM2.5、PM10 的改善建议

在计算 AQI 时我们发现，成都的首要污染物以 PM2.5 较多，而 PM2.5、PM10 联合起来占据了绝大多数比重。因此，有的放矢的去在日常生活中找到 PM2.5、PM10 的源头，并加以有效抑制是刻不容缓的。我们通过查阅资料并结合生活经历，找到一些典型的“源头”，在此提出一些初步的建议

- (1) 没有先进废气处理装置的使用柴油的大型车是 PM10、PM2.5 的主要排放源之一，包括大公交、各单位的班车，以及大型运输卡车等。政府应与相关部门合作，从车辆出厂时废气处理装置安装，到车辆上路的检查等不同侧面，去强制要求，有效监管这些大型车的废气处理情况，从而控制污染物的排放。
- (2) 扬尘是造成雾霾的颗粒物的主要产生方式之一，极大影响 PM10、PM2.5 的指数。同时我们发现扬尘主要是由城外车辆和施工车辆带来的，因此为了降低市区汽车车轮和路面尘埃的接触频率和面积，我们建议：
  - <1> 将花圃和路肩做得比汽车通行的路面低，这样雨浆水和污染洒水就会从马路中间流向花圃下的土壤。
  - <2> 在城外带尘车辆（运煤车和其他长途车等）入城时在

城市关口收费站边设立喷水清洗轮胎、底盘的环节，在城内施工车辆进入马路时设立遮盖和清洗轮胎、底盘的环节

### 3.2 风速，风向对工厂分布的影响

查阅相关资料得知，对应盛行风的下风方向应该是污染物的聚集区域，而盛行方向的上风方向应该是空气质量相对较好的区域，所以工厂应安排在主导风向的下风方向，居民区应安排在主导风向的上风方向。由第二部分分析可知，成都最近几年的主导风向即盛行风向是北风偏东，和南风偏西，即尽量将工厂安排在成都北方及北偏东的方向上。

通过对成都地区的风速数据处理，我们发现成都的 16 方位的平均风速都在 3m/s 以下，基本上是属于全年静风状态，在这种状态下，污染物的扩散形势是湍流扩散，缓慢得向周围扩散，在地面形成一个圆形区域，因此我们建议，成都的工业分布不宜简单的分布在盛行风的下风向，而是综合考虑，应该把主要工业区分开一定距离，这样在污染物缓慢扩散时，不会发生重叠交叉污染，防止一些地区常年重度污染，影响当地生态环境及居民的身体健康。

### 3.3 针对主要气象因素的改善建议

通过前面的关联度分析，我们找到主要的气象因素（温度，蒸发量，相对湿度）它们都不容易在现实生活中找到直接对其产生影响的因素，但由于它们的变化趋势和空气质量的变化趋势有很强的关联性，因此我们建议：可以通过查阅几十年内的这些气象因素变化走势，建立模型，去预测将来的空气质量变化，从而实现气象灾害预防与预警。这样可以方便政府及时作出决策，并作出相应调整，从而实现对空气质量的宏观调整。

### 3.4 整体分析过程中一些感受与建议

(1) 在查阅资料，与进行上述分析的过程中，我们感受到空气质量及其所反映的大气污染情况，是多方面，主客观因素共同决定的，因此，政府在着手改善空气质量时也应该建立多部门的共同协作机制，联合执法机制，以期望能在尽可能全面的角度去分析解决空气污染问题，如交通部门，环境部门，气象部门等等应该把数据共享分析，及时沟通交流，共同研讨改善空气状况的措施。

(2) 在分析污染源头及相应举措时，我们注意到很多指标，只有终端惩罚措施，却没有预防机制，如施工车辆入城后有罚款机制，却没有清理预防机制。预防机制的缺失及缺乏相应的具体治理要求，使得单一的惩罚效果并不明显，因此我们建议政府应要求相关部门明确具体治理要求，并积极的以主动的姿态去制定一套预防办法，而不是被动的以惩罚为唯一手段。

## 六、模型分析

### 1. 模型优点：

(1) 将国家空气质量分指数及对应的污染物项目浓度限值标准表结合成都当地情况，以美国标准规定 PM2.5，因地制宜，更好地反映了成都的当地的空气情况。

(2) 将空气质量进行量化，直接通过某一代表性数值来反映空气质量的好坏。

(3) 在研究主要因素时，阐明了各因素不用多元线性回归分析的原因及应用灰度分析的原因，使模型更加严谨。

(4) 将风向从诸多因素中提取出来, 进行单独分析, 利用玫瑰图, 得出污染系数与风向的大致分布和成都地区的主要风向。

## 2. 模型缺点

(1) 将每日的数据缩减到以月为单位的数据, 导致每个因素只有 18 个数据, 数据量太少, 而且每个数据都取平均值, 会有一定的误差。

(2) 人为因素分析的较少, 过于偏重自然因素的分析, 在对主要因素进行分析时, 可能会有遗漏。

## 3. 模型的改进

(1) 多分析一些人为因素, 比如成都市汽车尾气排放量、成都市每月燃煤量等等, 找出更贴近实际的主要因素。

## 七. 参考文献

[1] 徐全智, 数学建模第二版, 北京, 高等教育出版社, 76-79 页, 2008

[2] 谢中华, MATLAB 统计分析与应用, 北京, 航空航天大学出版社, 354-370 页, 2010

[3] 杜强, SPSS 统计分析从入门到精通, 北京, 人民邮电出版社, 271-278 页, 2008

[4] 中华人民共和国国家环境保护标准。

[5] 中国知网, [www.cnki.net](http://www.cnki.net), 2015 年 5 月 29 日